2025 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅰ

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. $(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}$ 的虚部为　　　　（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 6

2. 已知集合 $U=\{x\mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$，$A=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素的个数为　　　　（　　）

A. 0　　B. 3　　C. 5　　D. 8

3. 已知双曲线 C 的虚轴长是实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍，则 C 的离心率为　　　　（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{7}$　　D. $2\sqrt{2}$

4. 已知点 $(a,0)(a>0)$ 是函数 $y=2\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心，则 a 的最小值为　　　　（　　）

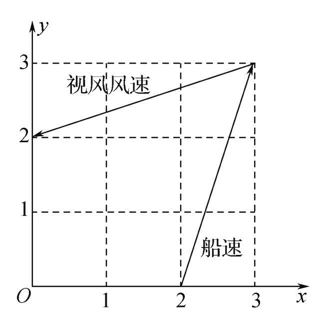
A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{4\pi}{3}$

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=5-2x$，则 $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=$　　　　（　　）

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

6. 帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小和方向，测出的结果在航海学中称为视风风速. 视风风速对应的向量是真风风速对应的向量与船行风风速对应的向量之和，其中船行风风速对应的向量与船速对应的向量大小相等、方向相反. 下表给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系. 已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图所示（线段长度代表速度大小，单位：m/s），则该时刻的真风为　　　　（　　）

级数	名称	风速大小（单位：m/s）
2	轻风	1.6～3.3
3	微风	3.4～5.4
4	和风	5.5～7.9
5	劲风	8.0～10.7



A. 轻风　　B. 微风　　C. 和风　　D. 劲风

7. 已知圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有 2 个，则 r 的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$

C. $(3,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

8. 已知 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则 x,y,z 的大小关系不可能为（　　）

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$

C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 的中点，则（　　）

A. $AD\perp A_1C$　　B. $B_1C_1\perp$平面 AA_1D

C. $AD/\!/A_1B_1$　　D. $CC_1/\!/$ 平面 AA_1D

10. 设抛物线 $C:y^2=6x$ 的焦点为 F，过点 F 的一条直线交抛物线 C 于 A,B 两点，过点 A 作直线 $l:x=-\dfrac{3}{2}$ 的垂线，垂足为 D，过点 F 且垂直于 AB 的直线交 l 于点 E，则（　　）

A. $|AD|=|AF|$　　B. $|AE|=|AB|$

C. $|AB|\geqslant 6$　　D. $|AE|\cdot|BE|\geqslant 18$

11. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{4}$，$\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2$，$\cos A\cos B\sin C=\dfrac{1}{4}$，则（　　）

A. $\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$

B. $AB=\sqrt{2}$

C. $\sin A+\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

D. $AC^2+BC^2=3$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的一条切线，则 $a=$________.

13. 若一个等比数列的各项均为正数，且前 4 项和为 4，前 8 项和为 68，则这个数列的公比为________.

14. 有 5 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，现从中有放回地随机取 3 次，每次取 1 个球. 记 X 为这 5 个球中至少被取出 1 次的球的个数，则 X 的数学期望 $E(X)=$________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

为研究某疾病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人，得到如下列联表：

组别 \ 超声波检查结果	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

（1）记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 p，求 p 的估计值；

（2）根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

16.（本小题满分 15 分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(1) 求证：数列$\{na_n\}$是等差数列；

(2) 给定正整数 m，设函数 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，求 $f'(-2)$.

17.（本小题满分 15 分）

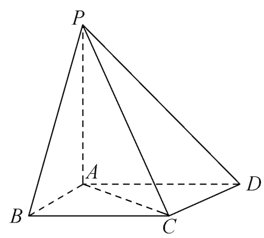
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$BC/\!/AD$.

(1) 求证：平面 $PAB\perp$平面 PAD.

(2) 若 $PA=AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，$AD=\sqrt{3}+1$，且点 P,B,C,D 均在球 O 的球面上.

① 求证：点 O 在平面 $ABCD$ 内；

② 求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值.



18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，下顶点为 A，右顶点为 B，$|AB|=\sqrt{10}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程.

（2）已知动点 P 不在 y 轴上，点 R 在射线 AP 上，且满足 $|AP|\cdot|AR|=3$.

① 设 $P(m,n)$，求 R 的坐标（用 m,n 表示）；

② 设 O 为坐标原点，Q 是椭圆 C 上的一动点，直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍，求 $|PQ|$ 的最大值.

19.（本小题满分 17 分）

（1）求函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值；

（2）给定 $\theta\in(0,\pi)$ 和 $a\in\mathbf{R}$，求证：存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$ 使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$；

（3）设 $b\in\mathbf{R}$，若存在 $\varphi\in\mathbf{R}$ 使得 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\leqslant b$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 b 的最小值.

2025 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅱ

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 样本数据 2，8，14，16，20 的平均数为 （　　）

A. 8　　B. 9　　C. 12　　D. 18

2. 已知复数 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\dfrac{1}{z-1}=$ （　　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. -1　　D. 1

3. 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x\mid x^3=x\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$　　C. $\{2,8\}$　　D. $\{0,1\}$

4. 不等式 $\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2$ 的解集是 （　　）

A. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$　　B. $\{x\mid x\leqslant -2\}$

C. $\{x\mid -2\leqslant x<1\}$　　D. $\{x\mid x>1\}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，则 $A=$ （　　）

A. $45°$　　B. $60°$　　C. $120°$　　D. $135°$

6. 设抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 A 在抛物线 C 上，过点 A 作抛物线 C 的准线的垂线，垂足为 B. 若直线 BF 的方程为 $y=-2x+2$，则 $|AF|=$ （　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_3=6$，$S_5=-5$，则 $S_6=$ （　　）

A. -20　　B. -15　　C. -10　　D. -5

8. 已知 $0<\alpha<\pi$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$ （　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$　　D. $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，q 为 $\{a_n\}$ 的公比，$q>0$. 若 $S_3=7$，$a_3=1$，则 （　　）

A. $q=\dfrac{1}{2}$　　B. $a_5=\dfrac{1}{9}$　　C. $S_5=8$　　D. $a_n+S_n=8$

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=(x^2-3)\mathrm{e}^x+2$，则 （　　）

A. $f(0)=0$

B. 当 $x<0$ 时，$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C. $f(x)\geqslant 2$,当且仅当 $x\geqslant\sqrt{3}$

D. $x=-1$ 是 $f(x)$的极大值点

11. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$左、右焦点分别为 F_1,F_2，左、右顶点分别为 A_1,A_2，以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于M,N 两点，且$\angle NA_1M=\dfrac{5\pi}{6}$,则 ( )

A. $\angle A_1MA_2=\dfrac{\pi}{6}$

B. $|MA_1|=2|MA_2|$

C. 双曲线 C 的离心率为$\sqrt{13}$

D. 当 $a=\sqrt{2}$时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$,$\boldsymbol{b}=(x-1,2x)$. 若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,则 $|\boldsymbol{a}|=$________.

13. 若 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$的极值点,则 $f(0)=$________.

14. 一个底面半径为 4 cm,高为 9 cm 的封闭圆柱形容器(容器壁厚度忽略不计)内有两个半径相等的铁球,则铁球半径的最大值为________cm.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(0\leqslant\varphi<\pi)$,$f(0)=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 φ 的值;

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,求 $g(x)$的值域和单调区间.

16.（本小题满分 15 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4.

(1) 求椭圆 C 的方程；

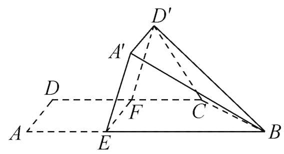
(2) 过点$(0,-2)$的直线 l 与椭圆C 交于A，B 两点，O 为坐标原点，若 $S_{\triangle OAB}=\sqrt{2}$，求$|AB|$.

17.（本小题满分 15 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$\angle DAB=90^\circ$，F 为 CD 的中点，点 E 在线段 AB 上，$EF /\!/ AD$，$AB=3AD$，$CD=2AD$. 将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$，使得平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成二面角为 60°.

（1）求证：$A'B /\!/$ 平面 $CD'F$；

（2）求平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值.



18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3$，其中 $0<k<\frac{1}{3}$.

(1) 求证：$f(x)$在$(0,+\infty)$上存在唯一的极值点和唯一的零点.

(2) 设 x_1,x_2 分别为 $f(x)$在$(0,+\infty)$上的极值点和零点.

① 设函数 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，求证：$g(t)$在$(0,x_1)$上单调递减；

② 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小，并证明.

19.（本小题满分 17 分）

甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得 1 分，负者得 0 分. 设每个球甲获胜的概率为 $p\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$. 乙获胜的概率为 q，$p+q=1$，且各球胜负独立. 对正整数 $k\geqslant 2$，记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

(1) 求 p_3，p_4（用 p 表示）；

(2) 若 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，求 p；

(3) 求证：对任意正整数 m，$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.

2024年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅰ

（满分150分，考试时间120分钟）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x\mid -5<x^3<5\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

2. 若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$ （　　）

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,x)$，若 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$，则 $x=$ （　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$ （　　）

A. $-3m$　　B. $-\dfrac{m}{3}$　　C. $\dfrac{m}{3}$　　D. $3m$

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为 （　　）

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $3\sqrt{3}\pi$　　C. $6\sqrt{3}\pi$　　D. $9\sqrt{3}\pi$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, & x<0,\\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1), & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$

C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

7. 当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为 （　　）

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，则下列结论一定正确的是 （　　）

A. $f(10)>100$　　B. $f(20)>1000$

C. $f(10)<1000$　　D. $f(20)<10000$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 为了了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区

抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\overline{x}=2.1$，样本方差 $s^2=0.01$. 已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8,0.1^2)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\overline{x},s^2)$，则(若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(Z<\mu+\sigma)\approx 0.8413$) ( )

A. $P(X>2)>0.2$

B. $P(X>2)<0.5$

C. $P(Y>2)>0.5$

D. $P(Y>2)<0.8$

10. 设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则 ( )

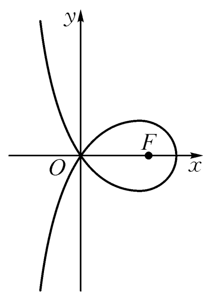
A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(x^2)$

C. 当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$

D. 当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

11. 造型可以看作图中曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O，且 C 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4，则 ( )



A. $a=-2$

B. 点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上

C. C 在第一象限内的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点 (x_0,y_0) 在 C 上时，$y_0\leqslant\frac{4}{x_0+2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A,B 两点. 若 $|F_1A|=13$，$|AB|=10$，则 C 的离心率为________.

13. 若曲线 $y=e^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线，则 $a=$________.

14. 甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1,3,5,7，乙的卡片上分别标有数字 2,4,6,8. 两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上的数字大小. 数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片(弃置的卡片在此后的轮次中不能使用). 则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

记$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.

（1）求 B；

（2）若$\triangle ABC$ 的面积为 $3+\sqrt{3}$，求 c.

16.（本小题满分 15 分）

已知 $A(0,3)$和 $P\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点.

（1）求 C 的离心率；

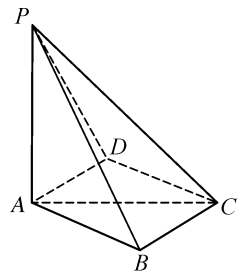
（2）若过点 P 的直线 l 交 C 于另一点 B，且$\triangle ABP$ 的面积为 9，求 l 的方程.

17.（本小题满分 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$.

（1）若 $AD\perp PB$，求证：$AD/\!/$平面 PBC；

（2）若 $AD\perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD.



18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$.

(1) 若 $b=0$，且 $f'(x)\geqslant 0$，求 a 的最小值；

(2) 求证：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

(3) 若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$ 时成立，求 b 的取值范围.

19.（本小题满分 17 分）

设 m 为正整数，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j(i<j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)-可分数列.

（1）写出所有的 (i,j)，$1\leqslant i<j\leqslant 6$，使得数列 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 是 (i,j)-可分数列；

（2）当 $m\geqslant 3$ 时，求证：数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 $(2,13)$-可分数列；

（3）从 $1,2,\cdots,4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j(i<j)$，记数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)-可分数列的概率为 P_m，求证：$P_m>\frac{1}{8}$.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅱ

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $z=-1-\mathrm{i}$，则 $|z|=$ （　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|>1$；命题 q：$\exists x>0$，$x^3=x$，则 （　　）

A. p 和 q 都是真命题　　B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和 $\neg q$ 都是真命题　　D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$，且 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{b}|=$ （　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并整理如下表：

亩产量	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)
频数	6	12	18
亩产量	[1050,1100)	[1100,1150)	[1150,1200)
频数	30	24	10

据表中数据，下列结论正确的是 （　　）

A. 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050 kg

B. 100 块稻田中亩产量低于 1100 kg 的稻田所占比例超过 80%

C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200 kg 至 300 kg 之间

D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900 kg 至 1000 kg 之间

5. 已知曲线 C：$x^2+y^2=16(y>0)$，从曲线 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP'，P' 为垂足，则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 （　　）

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1(y>0)$

C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y>0)$　　D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1(y>0)$

6. 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$. 当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点，则 $a=$ （　　）

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

7. 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$，$AB=6$，$A_1B_1=2$，则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 （　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$. 若 $f(x)\geqslant 0$,则 a^2+b^2 的最小值为 ( )

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$,下列说法正确的有 ( )

A. $f(x)$与 $g(x)$有相同的零点

B. $f(x)$与 $g(x)$有相同的最大值

C. $f(x)$与 $g(x)$有相同的最小正周期

D. $f(x)$与 $g(x)$的图象有相同的对称轴

10. 抛物线 $C:y^2=4x$ 的准线为 l,P 为抛物线 C 上的动点,过点 P 作圆 $A:x^2+(y-4)^2=1$ 的一条切线,Q 为切点,过点 P 作 l 的垂线,垂足为 B,则 ( )

A. 直线 l 与圆 A 相切

B. 当 P,A,B 三点共线时,$|PQ|=\sqrt{15}$

C. 当$|PB|=2$ 时,$PA\perp AB$

D. 满足$|PA|=|PB|$的点 P 有且仅有 2 个

11. 设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$,则 ( )

A. 当 $a>1$ 时,$f(x)$有三个零点

B. 当 $a<0$ 时,$x=0$ 是 $f(x)$的极大值点

C. 存在 a,b,使得直线 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$的对称轴

D. 存在 a,使得点$(1,f(1))$为曲线 $y=f(x)$的对称中心

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和. 若 $a_3+a_4=7$,$3a_2+a_5=5$,则 $S_{10}=$________.

13. 已知 α 为第一象限角,β 为第三象限角,$\tan\alpha+\tan\beta=4$,$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$,则 $\sin(\alpha+\beta)=$________.

14. 在如图的 4×4 方格表中选 4 个方格,要求每行和每列均恰有一个方格被选中,则共有________种选法,在所有符合上述要求的选法中,选中的方格中的 4 个数之和的最大值是________.(本题第一空 2 分,第二空 3 分)

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

记$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

(1) 求 A;

(2) 若 $a=2$,$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$,求$\triangle ABC$ 的周长.

16. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-ax-a^{3}$.

(1) 当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

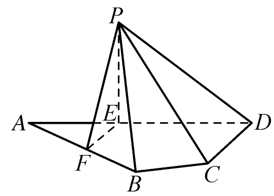
(2) 若 $f(x)$有极小值,且极小值小于 0,求 a 的取值范围.

17.（本小题满分 15 分）

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$CD=3$，$AD=5\sqrt{3}$，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle BAD=30^\circ$，点 E，F 满足 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，将△$AEF$ 沿 EF 翻折至△PEF，使得 $PC=4\sqrt{3}$.

（1）求证：$EF\perp PD$；

（2）求平面 PCD 与平面 PBF 所成的二面角的正弦值.



18.（本小题满分 17 分）

某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成绩为 0 分；若至少投中 1 次，则该队进入第二阶段. 第二阶段由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分. 该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和.

某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 p，乙每次投中的概率为 q，各次投中与否相互独立.

(1) 若 $p=0.4$，$q=0.5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率.

(2) 假设 $0<p<q$，

① 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

② 为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

19.（本小题满分17分）

已知双曲线C：$x^2-y^2=m(m>0)$，点$P_1(5,4)$在C上，k为常数，$0<k<1$.按照如下方式依次构造点$P_n(n=2,3,\cdots)$：过P_{n-1}作斜率为k的直线与C的左支交于点Q_{n-1}，令P_n为Q_{n-1}关于y轴的对称点.记P_n的坐标为(x_n,y_n).

(1) 若$k=\dfrac{1}{2}$，求x_2,y_2；

(2) 求证：数列$\{x_n-y_n\}$是公比为$\dfrac{1+k}{1-k}$的等比数列；

(3) 设S_n为$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$的面积，求证：对任意的正整数$n$，$S_n=S_{n+1}$.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅰ

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}$，则 $M\cap N=$ （　　）

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{-2\}$　　D. $\{2\}$

2. 已知 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$，则 $z-\bar{z}=$ （　　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. 0　　D. 1

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$. 若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$，则 （　　）

A. $\lambda+\mu=1$　　B. $\lambda+\mu=-1$

C. $\lambda\mu=1$　　D. $\lambda\mu=-1$

4. 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，则 a 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,0)$

C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

5. 设椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$C_2$：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1，e_2. 若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$ （　　）

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

6. 过点 $(0,-2)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 α，则 $\sin\alpha=$ （　　）

A. 1　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列，乙：$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，则 （　　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$ （　　）

A. $\frac{7}{9}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $-\frac{1}{9}$　　D. $-\frac{7}{9}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，其中 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则　　(　　)

A. x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数

B. x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数

C. x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不小于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差

D. x_2,x_3,x_4,x_5 的极差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的极差

10. 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p=20\times\lg\frac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0(p_0>0)$是听觉下限阈值，p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级：

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60～90
混合动力汽车	10	50～60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1,p_2,p_3，则　　(　　)

A. $p_1\geqslant p_2$　　B. $p_2>10p_3$

C. $p_3=100p_0$　　D. $p_1\leqslant 100p_2$

11. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，则　　(　　)

A. $f(0)=0$

B. $f(1)=0$

C. $f(x)$是偶函数

D. $x=0$ 为 $f(x)$的极小值点

12. 下列物体中，能够被整体放入棱长为 1(单位：m)的正方体容器(容器壁厚度忽略不计)内的有　　(　　)

A. 直径为 0.99 m 的球体

B. 所有棱长均为 1.4 m 的四面体

C. 底面直径为 0.01 m，高为 1.8 m 的圆柱体

D. 底面直径为 1.2 m，高为 0.01 m 的圆柱体

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，

则不同的选课方案共有________种(用数字作答).

14. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=2$,$A_1B_1=1$,$AA_1=\sqrt{2}$,则该棱台的体积为________.

15. 已知函数 $f(x)=\cos \omega x-1(\omega>0)$在区间$[0,2\pi]$上有且仅有 3 个零点,则 ω 的取值范围是________.

16. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2.点 A 在C 上,点 B 在 y 轴上,$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$,$\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$,则 C 的离心率为________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知在$\triangle ABC$ 中,$A+B=3C$,$2\sin(A-C)=\sin B$.

(1) 求 $\sin A$;

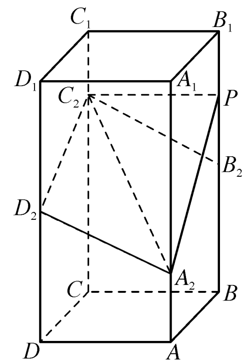
(2) 设 $AB=5$,求 AB 边上的高.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$. 点 A_2，B_2，C_2，D_2 分别在棱 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$.

（1）求证：$B_2C_2 /\!/ A_2D_2$；

（2）点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$ 时，求 B_2P.



19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）求证：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$.

20.（本小题满分 12 分）

设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，且 $d>1$. 令 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$，记 S_n，T_n 分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和.

（1）若 $3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$\{b_n\}$为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 d.

21.（本小题满分 12 分）

甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中，则此人继续投篮，若未命中，则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8. 由抽签确定第 1 次投篮的人选，第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

（1）求第 2 次投篮的人是乙的概率；

（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}q_i$，记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$.

22.（本小题满分 12 分）

在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W.

（1）求 W 的方程.

（2）已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试 · 新高考卷 Ⅱ

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 在复平面内，$(1+3i)(3-i)$对应的点位于 （　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$ （　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{2}{3}$　　D. -1

3. 某学校为了了解学生参加体育运动的情况，用比例分配的分层随机抽样方法作抽样调查，拟从初中部和高中部两层共抽取 60 名学生. 已知该校初中部和高中部分别有 400 名和 200 名学生，则不同的抽样结果共有 （　　）

A. $C_{400}^{45}\cdot C_{200}^{15}$ 种　　B. $C_{400}^{20}\cdot C_{200}^{40}$ 种

C. $C_{400}^{30}\cdot C_{200}^{30}$ 种　　D. $C_{400}^{40}\cdot C_{200}^{20}$ 种

4. 若 $f(x)=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$为偶函数，则 $a=$ （　　）

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

5. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 $y=x+m$ 与 C 交于 A，B 两点. 若$\triangle F_1AB$ 面积是$\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍，则 $m=$ （　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

6. 已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间$(1,2)$上单调递增，则 a 的最小值为 （　　）

A. e^2　　B. e　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

7. 已知 α 为锐角，$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，则 $\sin\frac{\alpha}{2}=$ （　　）

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$　　B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$　　C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$　　D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

8. 记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则 $S_8=$ （　　）

A. 120　　B. 85　　C. -85　　D. -120

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知圆锥的顶点为 P，底面圆心为 O，AB 为底面直径，$\angle APB=120°$，$PA=2$，点 C 在底面圆周上，且二面角 P-AC-O 为 $45°$，则 （　　）

A. 该圆锥的体积为 π　　B. 该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$

C. $AC=2\sqrt{2}$　　D. $\triangle PAC$ 的面积为$\sqrt{3}$

10. 设 O 为坐标原点，直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点，且与 C 交于 M，N 两点，l 为 C 的准线，则（　　）

A. $p=2$

B. $|MN|=\dfrac{8}{3}$

C. 以 MN 为直径的圆与 l 相切

D. $\triangle OMN$ 为等腰三角形

11. 若函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}(a\neq 0)$ 既有极大值也有极小值，则 （　　）

A. $bc>0$　　B. $ab>0$　　C. $b^2+8ac>0$　D. $ac<0$

12. 在信道内传输 0，1 信号，信号的传输相互独立. 发送 0 时，收到 1 的概率为 $\alpha(0<\alpha<1)$，收到 0 的概率为 $1-\alpha$；发送 1 时，收到 0 的概率为 $\beta(0<\beta<1)$，收到 1 的概率为 $1-\beta$. 考虑两种传输方案：单次传输和三次传输. 单次传输是指每个信号只发送 1 次，三次传输是指每个信号重复发送 3 次，收到的信号需要译码，译码规则如下：单次传输时，收到的信号即为译码；三次传输时，收到的信号中出现次数多的即为译码(例如，若依次收到 1，0，1，则译码为 1). （　　）

A. 采用单次传输方案，若依次发送 1，0，1，则依次收到 1，0，1 的概率为 $(1-\alpha)(1-\beta)^2$

B. 采用三次传输方案，若发送 1，则依次收到 1，0，1 的概率为 $\beta(1-\beta)^2$

C. 采用三次传输方案，若发送 1，则译码为 1 的概率为 $\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3$

D. 当 $0<\alpha<0.5$ 时，若发送 0，则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

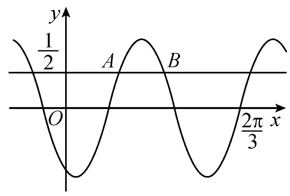
13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{b}|=$________.

14. 底面边长为 4 的正四棱锥被平行于其底面的平面所截，截去

一个底面边长为 2，高为 3 的正四棱锥，所得棱台的体积为________.

15. 已知直线 $l: x-my+1=0$ 与圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，写出满足“$\triangle ABC$ 面积为$\frac{8}{5}$”的 m 的一个值为________.

16. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$. 如图，$A$，$B$ 是直线 $y=\frac{1}{2}$与曲线 $y=f(x)$的两个交点，若$|AB|=\frac{\pi}{6}$，则 $f(\pi)=$________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

记$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知$\triangle ABC$ 的面积为$\sqrt{3}$，D 为 BC 的中点，且 $AD=1$.

（1）若$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，求 $\tan B$；

（2）若 $b^2+c^2=8$，求 b，c.

18.（本小题满分 12 分）

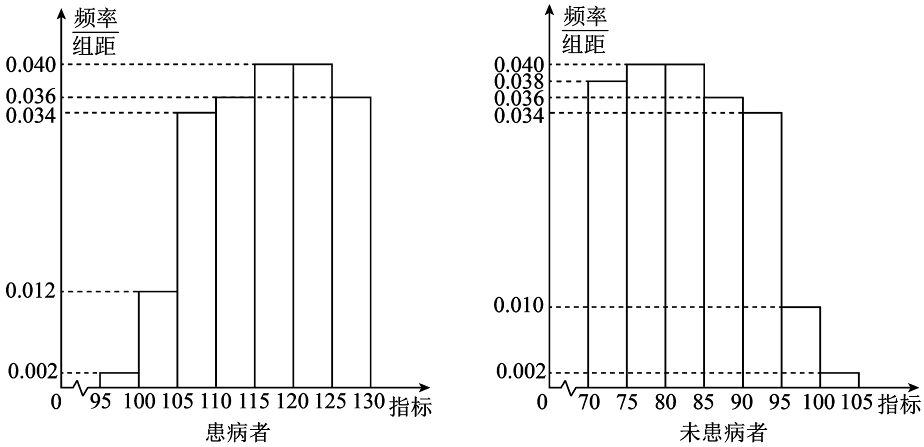
已知$\{a_n\}$为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6, & n\text{ 为奇数},\\ 2a_n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$记 S_n，T_n 分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和，$S_4=32$，$T_3=16$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求证：当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

19.（本小题满分 12 分）

某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异，经过大量调查，得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图.



利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值 c，将该指标大于 c 的人判定为阳性，小于或等于 c 的人判定为阴性. 此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率，记为 $p(c)$；误诊率是将未患病者判定为阳性的概率，记为 $q(c)$. 假设数据在组内均匀分布，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.

（1）当漏诊率 $p(c)=0.5\%$时，求临界值 c 和误诊率 $q(c)$；

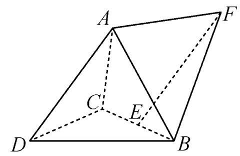
（2）设函数 $f(c)=p(c)+q(c)$，当 $c\in[95,105]$时，求 $f(c)$的解析式，并求 $f(c)$在区间$[95,105]$上的最小值.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60^{\circ}$，$E$ 为 BC 的中点.

（1）求证：$BC\perp DA$；

（2）若点 F 满足 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）

已知双曲线 C 的中心为坐标原点，左焦点为 $(-2\sqrt{5},0)$，离心率为 $\sqrt{5}$.

（1）求 C 的方程；

（2）记 C 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，过点 $(-4,0)$ 的直线与 C 的左支交于 M，N 两点，点 M 在第二象限，直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P，求证：点 P 在定直线上.

22.（本小题满分 12 分）

（1）证明：当 $0<x<1$ 时，$x-x^2<\sin x<x$；

（2）已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围.

2022 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅰ

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M=\{x\mid\sqrt{x}<4\}$，$N=\{x\mid 3x\geqslant 1\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{x\mid 0\leqslant x<2\}$　　B. $\left\{x\left|\frac{1}{3}\leqslant x<2\right.\right\}$

C. $\{x\mid 3\leqslant x<16\}$　　D. $\left\{x\left|\frac{1}{3}\leqslant x<16\right.\right\}$

2. 若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\bar{z}=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$. 记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{CB}=$（　　）

A. $3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　B. $-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$　　C. $3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　D. $2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5 m 时，相应水面的面积为 140.0 km^2；水位为海拔 157.5 m 时，相应水面的面积为 180.0 km^2. 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5 m 上升到 157.5 m 时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）（　　）

A. $1.0\times 10^9\ \mathrm{m}^3$　　B. $1.2\times 10^9\ \mathrm{m}^3$

C. $1.4\times 10^9\ \mathrm{m}^3$　　D. $1.6\times 10^9\ \mathrm{m}^3$

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

6. 记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$ 的最小正周期为 T. 若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 中心对称，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$（　　）

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

7. 设 $a=0.1\mathrm{e}^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为 36π，且 $3\leqslant l\leqslant 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则 ( )

A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$

B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$

D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

10. 已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则

A. $f(x)$有两个极值点

B. $f(x)$有三个零点

C. 点$(0,1)$是曲线 $y=f(x)$的对称中心

D. 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$的切线

11. 已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$在抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$上，过点 $B(0,-1)$的直线交 C 于 P，Q 两点，则 ( )

A. C 的准线为 $y=-1$

B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$

D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

12. 已知函数 $f(x)$及其导函数 $f'(x)$的定义域均为 **R**，记 $g(x)=f'(x)$. 若 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$均为偶函数，则 ( )

A. $f(0)=0$　　B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

C. $f(-1)=f(4)$　　D. $g(-1)=g(2)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为________(用数字作答).

14. 写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和$(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程为________.

15. 若曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是________.

16. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1，F_2，离心率为$\frac{1}{2}$. 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，$|DE|=6$，则$\triangle ADE$ 的周长是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求证：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

18.（本小题满分 12 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

（1）若 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，求 B；

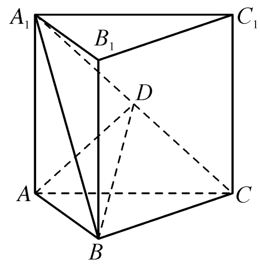
（2）求 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

19.（本小题满分 12 分）

如图,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4,$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求点 A 到平面 A_1BC 的距离;

(2) 设 D 为 A_1C 的中点,$AA_1=AB$,平面 $A_1BC\perp$平面 ABB_1A_1,求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.



20.（本小题满分 12 分）

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例(称为病例组)，同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人(称为对照组)，得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99％的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患有该疾病”，$\dfrac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$与$\dfrac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R.

① 求证：$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$；

② 利用该调查数据，给出 $P(A|B)$，$P(A|\bar{B})$的估计值，并利用①的结果给出 R 的估计值.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.050	0.010	0.001
x_0	3.841	6.635	10.828

21. （本小题满分 12 分）

已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$ 上，直线 l 交 C 于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 的斜率之和为 0.

（1）求 l 的斜率；

（2）若 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求 $\triangle PAQ$ 的面积.

22. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值.

（1）求 a；

（2）求证：存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

2022年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅱ

（满分150分，考试时间120分钟）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,1,2,4\}$，$B=\{x\,|\,|x-1|\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $\{-1,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{1,4\}$　　D. $\{-1,4\}$

2. $(2+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=$ （　　）

A. $-2+4\mathrm{i}$　　B. $-2-4\mathrm{i}$　　C. $6+2\mathrm{i}$　　D. $6-2\mathrm{i}$

3. 图1是中国古代建筑中的举架结构，AA'，BB'，CC'，DD'是桁，相邻桁的水平距离称为步，垂直距离称为举. 图2是某古代建筑屋顶截面的示意图，其中 DD_1，CC_1，BB_1，AA_1 是举，OD_1，DC_1，CB_1，BA_1 是相等的步，相邻桁的举步之比分别为 $\frac{DD_1}{OD_1}=0.5$，$\frac{CC_1}{DC_1}=k_1$，$\frac{BB_1}{CB_1}=k_2$，$\frac{AA_1}{BA_1}=k_3$，已知 k_1，k_2，k_3 成公差为0.1的等差数列，且直线 OA 的斜率为0.725，则 $k_3=$ （　　）

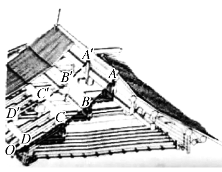


图1

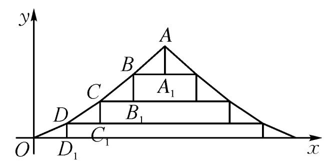


图2

A. 0.75　　B. 0.8　　C. 0.85　　D. 0.9

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$，若 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$，则 $t=$ （　　）

A. -6　　B. -5　　C. 5　　D. 6

5. 甲、乙、丙、丁、戊5名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，丙和丁相邻，则不同的排列方式共有 （　　）

A. 12种　　B. 24种　　C. 36种　　D. 48种

6. 若 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，则 （　　）

A. $\tan(\alpha-\beta)=1$　　B. $\tan(\alpha+\beta)=1$

C. $\tan(\alpha-\beta)=-1$　　D. $\tan(\alpha+\beta)=-1$

7. 已知正三棱台的高为1，上、下底面边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为 （　　）

A. 100π　　B. 128π　　C. 144π　　D. 192π

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)\cdot f(y)$，$f(1)=1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=$ （　　）

A. -3　　B. -2　　C. 0　　D. 1

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$ 中心对称，则 (　　)

A. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递减

B. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$ 上有两个极值点

C. 直线 $x=\frac{7\pi}{6}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

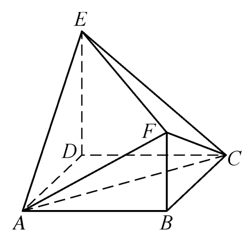
D. 直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

10. 已知 O 为坐标原点，过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的直线与 C 交于 A,B 两点，其中 A 在第一象限，点 $M(p,0)$. 若 $|AF|=|AM|$，则 (　　)

A. 直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{6}$　　B. $|OB|=|OF|$

C. $|AB|>4|OF|$　　D. $\angle OAM+\angle OBM<180°$

11. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$ED\perp$ 平面 $ABCD$，$FB /\!/ ED$，$AB=ED=2FB$，记三棱锥 $E-ACD$，$F-ABC$，$F-ACE$ 的体积分别为 V_1，V_2，V_3，则 (　　)



A. $V_3=2V_2$　　B. $V_3=V_1$

C. $V_3=V_1+V_2$　　D. $2V_3=3V_1$

12. 若 x,y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则 (　　)

A. $x+y\leqslant 1$　B. $x+y\geqslant -2$　C. $x^2+y^2\leqslant 2$　D. $x^2+y^2\geqslant 1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P(2<X\leqslant 2.5)=0.36$，则 $P(X>2.5)=$________.

14. 曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为________，________.

15. 设点 $A(-2,3)$，$B(0,a)$，若直线 AB 关于 $y=a$ 对称的直线与圆 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点，则 a 的取值范围是________.

16. 已知直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 在第一象限交于 A,B 两点，l 与 x 轴、y 轴分别交于 M,N 两点，且 $|MA|=|NB|$，$|MN|=2\sqrt{3}$，则 l 的方程为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是公比为 2 的等比数列，且 $a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$.

（1）求证：$a_1=b_1$；

（2）求集合$\{k\mid b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$中元素的个数.

18.（本小题满分 12 分）

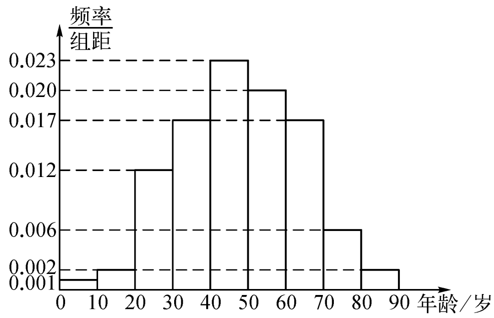
记$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，分别以 a,b,c 为边长的三个正三角形的面积依次为 S_1,S_2,S_3. 已知 $S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin B=\frac{1}{3}$.

（1）求$\triangle ABC$ 的面积；

（2）若 $\sin A\sin C=\frac{\sqrt{2}}{3}$，求 b.

19.（本小题满分12分）

在某地区进行流行病学调查，随机调查了100位某种疾病患者的年龄，得到如下的样本数据的频率分布直方图.



（1）估计该地区这种疾病患者的平均年龄（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

（2）估计该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间$[20,70)$的概率；

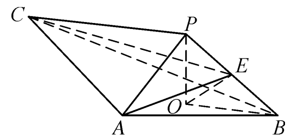
（3）已知该地区这种疾病的患病率为0.1%，该地区年龄位于区间$[40,50)$的人口占该地区总人口的16%，从该地区中任选一人，若此人的年龄位于区间$[40,50)$，求此人患这种疾病的概率（以样本数据中患者的年龄位于各区间的频率作为患者的年龄位于该区间的概率，精确到0.0001）.

20.（本小题满分 12 分）

如图，PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E 为 PB 的中点.

（1）求证：$OE/\!/$平面 PAC；

（2）若 $\angle ABO=\angle CBO=30^\circ$，$PO=3$，$PA=5$，求二面角 $C-AE-B$ 的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）

设双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为 $F(2,0)$，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

（1）求 C 的方程；

（2）过 F 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点，点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$在 C 上，且 $x_1>x_2>0$，$y_1>0$. 过 P 且斜率为 $-\sqrt{3}$的直线与过 Q 且斜率为$\sqrt{3}$的直线交于点 M，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

① M 在 AB 上；② $PQ/\!/AB$；③ $|MA|=|MB|$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{x}$.

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)<-1$，求 a 的取值范围；

（3）设 $n\in\mathbf{N}^{*}$，求证：$\frac{1}{\sqrt{1^{2}+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^{2}+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^{2}+n}}>\ln(n+1)$.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅰ

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 已知 $z=2-\mathrm{i}$，则 $z(\bar{z}+\mathrm{i})=$ （　　）

A. $6-2\mathrm{i}$　　B. $4-2\mathrm{i}$　　C. $6+2\mathrm{i}$　　D. $4+2\mathrm{i}$

3. 已知圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为 （　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

4. 下列区间中，函数 $f(x)=7\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的单调递增区间是 （　　）

A. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

C. $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

5. 已知 F_1，F_2 是椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，点 M 在 C 上，则$|MF_1|\cdot|MF_2|$的最大值为 （　　）

A. 13　　B. 12　　C. 9　　D. 6

6. 若 $\tan\theta=-2$，则$\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$ （　　）

A. $-\frac{6}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{6}{5}$

7. 若过点(a,b)可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线，则 （　　）

A. $\mathrm{e}^b<a$　　B. $\mathrm{e}^a<b$

C. $0<a<\mathrm{e}^b$　　D. $0<b<\mathrm{e}^a$

8. 有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中有放回地随机取两次，每次取 1 个球. 甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则 （　　）

A. 甲与丙相互独立　　B. 甲与丁相互独立

C. 乙与丙相互独立　　　　　　D. 丙与丁相互独立

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，由这组数据得到新样本数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，其中 $y_i=x_i+c(i=1,2,\cdots,n)$，$c$ 为非零常数，则 (　　)

A. 两组样本数据的样本平均数相同

B. 两组样本数据的样本中位数相同

C. 两组样本数据的样本标准差相同

D. 两组样本数据的样本极差相同

10. 已知 O 为坐标原点，点 $P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$A(1,0)$，则 (　　)

A. $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|$

B. $|\overrightarrow{AP_1}|=|\overrightarrow{AP_2}|$

C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$

D. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

11. 已知点 P 在圆 $(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 上，点 $A(4,0)$，$B(0,2)$，则 (　　)

A. 点 P 到直线 AB 的距离小于 10

B. 点 P 到直线 AB 的距离大于 2

C. 当 $\angle PBA$ 最小时，$|PB|=3\sqrt{2}$

D. 当 $\angle PBA$ 最大时，$|PB|=3\sqrt{2}$

12. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则 (　　)

A. 当 $\lambda=1$ 时，$\triangle AB_1P$ 的周长为定值

B. 当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

C. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BP$

D. 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$是偶函数，则 $a=$________.

14. 已知 O 为坐标原点，抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，P 为 C 上一点，PF 与 x 轴垂直，Q 为 x 轴上一点，且 $PQ\perp OP$. 若 $|FQ|=6$，则 C 的准线方程为________.

15. 函数 $f(x)=|2x-1|-2\ln x$ 的最小值为________.

16. 某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折. 规格为 20 dm×12 dm 的长方形纸，对折 1 次共可以得到 10 dm×12 dm，20 dm×6 dm 两种规格的图形，它们的面积之和 $S_1=240\ \text{dm}^2$，对折 2 次共可以得到 5 dm×12 dm，10 dm×6 dm，20 dm×3 dm 三种规格的图形，它们的面积之和 $S_2=180\ \text{dm}^2$，以此类推. 则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为________；如果对折 n 次，那么 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=$________$\text{dm}^2$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 10 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n\text{ 为奇数}, \\ a_n+2, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(1) 记 $b_n=a_{2n}$，写出 b_1，b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 求数列$\{a_n\}$的前 20 项和.

18.（本小题满分 12 分）

某学校组织"一带一路"知识竞赛，有 A，B 两类问题. 每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误，则该同学比赛结束；若回答正确，则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束. A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分.

已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

（1）若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列.

（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

19.（本小题满分 12 分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$b^2=ac$，点D在边AC上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）求证：$BD=b$；

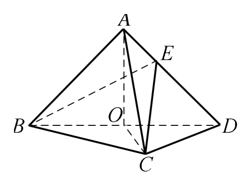
（2）若$AD=2DC$，求$\cos\angle ABC$.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥$A-BCD$中，平面$ABD\perp$平面BCD，$AB=AD$，O为BD的中点.

（1）求证：$OA\perp CD$；

（2）若$\triangle OCD$是边长为 1 的等边三角形，点E在棱AD上，$DE=2EA$，且二面角$E-BC-D$的大小为$45°$，求三棱锥$A-BCD$的体积.



21.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$，$F_2(\sqrt{17},0)$，点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$. 记 M 的轨迹为 C.

（1）求 C 的方程；

（2）设点 T 在直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A，B 两点和 P，Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 a，b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，求证：$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅱ

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 在复平面内，复数$\dfrac{2-\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 若全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 $A=\{1,3,6\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A\cap \complement_U B=$（　　）

A. $\{3\}$　　B. $\{1,6\}$

C. $\{5,6\}$　　D. $\{1,3\}$

3. 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点到直线 $y=x+1$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则 $p=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

4. 卫星导航系统中，地球静止同步轨道卫星的轨道位于地球赤道所在平面，轨道高度为 36000 km（轨道高度指卫星到地球表面的最短距离），把地球看成一个球心为 O，半径为 6400 km 的球，其上点 A 的纬度是指 OA 与赤道所在平面所成角的度数，地球表面能直接观测到的一颗地球静止同步轨道卫星的点的纬度的最大值记为 α，该卫星信号覆盖的地球表面面积 $S=2\pi r^2(1-\cos\alpha)$（单位：km^2），则 S 占地球表面积的百分比为（　　）

A. 26%　　B. 34%

C. 42%　　D. 50%

5. 正四棱台的上、下底面的边长分别为 2，4，侧棱长为 2，则四棱台的体积为（　　）

A. $20+12\sqrt{3}$　　B. $28\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{28\sqrt{2}}{3}$　　D. $\dfrac{56}{3}$

6. 某物理量的测量结果服从正态分布 $N(10,\sigma^2)$，则下列结论错误的是（　　）

A. σ 越小，该物理量一次测量结果落在(9.9，10.1)内的概率越大

B. σ 越小，该物理量一次测量结果大于 10 的概率为 0.5

C. σ 越小，该物理量一次测量结果大于 10.01 的概率与小于 9.99 的概率相等

D. σ 越小，该物理量一次测量结果落在(9.9，10.2)内的概率与落在(10，10.3)内的概率相等

7. 已知 $a=\log_5 2, b=\log_8 3, c=\frac{1}{2}$，则下列判断正确的是 ( )

A. $c<b<a$　　B. $b<a<c$

C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+2)$ 是偶函数，$f(2x+1)$ 是奇函数，则下列选项中的值一定为 0 的是 ( )

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)$　　B. $f(-1)$

C. $f(2)$　　D. $f(4)$

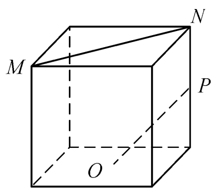
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列统计量中可用于度量样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 离散程度的有 ( )

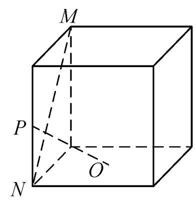
A. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的标准差　　B. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的中位数

C. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的极差　　D. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数

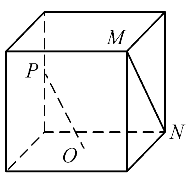
10. 如图，下列各正方体中，O 为下底面的中心，M, N 为顶点，P 为正方体所在棱的中点，则满足 $MN \perp OP$ 的是 ( )



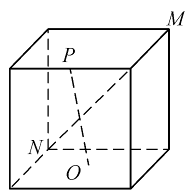
A



B



C



D

11. 已知直线 $l: ax+by-r^2=0$ 与圆 $C: x^2+y^2=r^2$，点 $A(a, b)$，则下列说法正确的是 ( )

A. 若点 A 在圆 C 上，则直线 l 与圆 C 相切

B. 若点 A 在圆 C 内，则直线 l 与圆 C 相离

C. 若点 A 在圆 C 外，则直线 l 与圆 C 相离

D. 若点 A 在直线 l 上，则直线 l 与圆 C 相切

12. 设正整数 $n=a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2^1+\cdots+a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+a_k\cdot 2^k$，其中 $a_i\in\{0,1\}$，记 $\omega(n)=a_0+a_1+\cdots+a_k$，则 ( )

A. $\omega(2n)=\omega(n)$　　B. $\omega(2n+3)=\omega(n)+1$

C. $\omega(8n+5)=\omega(4n+3)$　　D. $\omega(2^n-1)=n$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，离心率 $e=2$，则双曲线 C 的渐近线方程为________.

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$：________.

①$f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$；②当 $x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$；③$f'(x)$是奇函数.

15. 已知向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$________.

16. 已知函数 $f(x)=|\mathrm{e}^x-1|$，$x_1<0$，$x_2>0$，函数 $f(x)$的图象在点 $A(x_1,f(x_1))$和点 $B(x_2,f(x_2))$处的两条切线互相垂直，且分别与 y 轴交于M,N 两点，则$\frac{|AM|}{|BN|}$的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 10 分）

记 S_n 为公差不为零的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_3=S_5$，$a_2a_4=S_4$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求使得 $S_n>a_n$ 的n 的最小值.

18.（本小题满分 12 分）

在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$b=a+1$，$c=a+2$.

（1）若$2\sin C=3\sin A$，求$\triangle ABC$的面积.

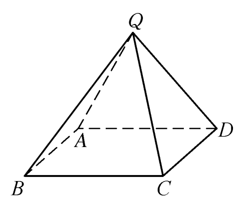
（2）是否存在正整数a，使得$\triangle ABC$为钝角三角形？若存在，求出a的值；若不存在，请说明理由.

19.（本小题满分 12 分）

在四棱锥$Q-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，若$AD=2$，$QD=QA=\sqrt{5}$，$QC=3$.

（1）求证：平面$QAD\perp$平面$ABCD$；

（2）求二面角$B-QD-A$的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,若右焦点为 $F(\sqrt{2},0)$,且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 M,N 是 C 上的两点,直线 MN 与曲线 $x^2+y^2=b^2(x>0)$ 相切,求证:M,N,F 三点共线的充要条件是 $|MN|=\sqrt{3}$.

21. (本小题满分 12 分)

一种微生物群体可以经过自身繁殖不断生存下来.设一个这种微生物为第 0 代,经过一次繁殖后为第 1 代,再经过一次繁殖后为第 2 代……该微生物每代繁殖的个数是相互独立的且有相同的分布列.设 X 表示 1 个微生物个体繁殖下一代的个数,$P(X=i)=p_i(i=0,1,2,3)$.

(1) 已知 $p_0=0.4,p_1=0.3,p_2=0.2,p_3=0.1$,求 $E(X)$;

(2) 设 p 表示该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率,p 是关于 x 的方程 $p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x$ 的一个最小正实根,求证:当 $E(X)\leqslant 1$ 时,$p=1$,当 $E(X)>1$ 时,$p<1$;

(3) 根据你的理解说明第(2)问结论的实际含义.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax^2+b$.

（1）讨论函数 $f(x)$的单调性.

（2）从下面两个条件中选一个，求证：$f(x)$有一个零点.

① $\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e^2}{2}$，$b>2a$；

② $0<a<\frac{1}{2}$，$b\leqslant 2a$.

2020 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅰ

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid 2<x<4\}$，则 $A\cup B=$ （　　）

A. $\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$　　B. $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$

C. $\{x\mid 1\leqslant x<4\}$　　D. $\{x\mid 1<x<4\}$

2. $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$ （　　）

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-\mathrm{i}$

3. 6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只去 1 个场馆，甲场馆安排 1 名，乙场馆安排 2 名，丙场馆安排 3 名，则不同的安排方法共有 （　　）

A. 120 种　　B. 90 种

C. 60 种　　D. 30 种

4. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球（球心记为 O），地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面. 在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北纬 40°，则晷针与点 A 处的水平面所成角为 （　　）

A. 20°　　B. 40°　　C. 50°　　D. 90°

5. 某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳，60% 的学生喜欢足球，82% 的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 （　　）

A. 62%　　B. 56%　　C. 46%　　D. 42%

6. 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是流行病学的基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在某传染病初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=\mathrm{e}^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t（单位：天）的变化规律，指数增长率 r 与 R_0，T 近似满足 $R_0=1+rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$，$T=6$. 据此，在某传染病的初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为（$\ln 2\approx 0.69$） （　　）

A. 1.2 天　　B. 1.8 天　　C. 2.5 天　　D. 3.5 天

7. 已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 （　　）

A. $(-2,6)$　　B. $(-6,2)$

C. $(-2,4)$　　D. $(-4,6)$

8. 若定义在 R 上的奇函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $[-1,1]\cup[3,+\infty)$　　B. $[-3,-1]\cup[0,1]$

C. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　D. $[-1,0]\cup[1,3]$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 已知曲线 C：$mx^2+ny^2=1$. ( )

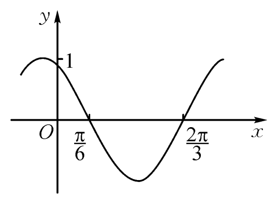
A. 若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

B. 若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为$\sqrt{n}$

C. 若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{n}}x$

D. 若 $m=0$，$n>0$，则 C 是两条直线

10. 右图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象，则 $\sin(\omega x+\varphi)=$ ( )



A. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

B. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

C. $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

D. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-2x\right)$

11. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则 ( )

A. $a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$　　B. $2^{a-b}>\dfrac{1}{2}$

C. $\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$　　D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

12. 信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量 X 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,n$，且 $P(X=i)=p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$，定义 X 的信息熵 $H(X)=-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$. ( )

A. 若 $n=1$，则 $H(X)=0$

B. 若 $n=2$，则 $H(X)$随着 p_1 的增大而增大

C. 若 $p_i=\dfrac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $H(X)$随着 n 的增大而增大

D. 若 $n=2m$，随机变量 Y 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,m$，且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}(j=1,2,\cdots,m)$，则 $H(X)\leqslant H(Y)$

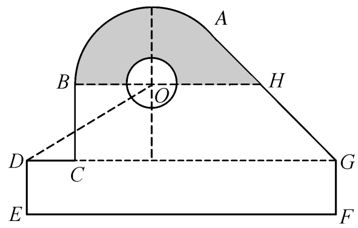
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 斜率为$\sqrt{3}$的直线过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，且与 C 交于 A，B 两点，则$|AB|=$________.

14. 将数列$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$的前 n 项和为________.

15. 某中学开展劳动实习，学生加工制作零件，零件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的圆心，A 是圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与直线 AG 的切点，B 是圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与直线 BC 的切点，四边形 $DEFG$ 为矩形，$BC\perp$

DG，垂足为 C，$\tan\angle ODC=\dfrac{3}{5}$，$BH/\!/DG$，$EF=12\text{ cm}$，$DE=2\text{ cm}$，$A$ 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm，圆孔半径为 1 cm，则图中阴影部分的面积为________ cm^2.



16. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD=60°$. 以 D_1 为球心，$\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在①$ac=\sqrt{3}$，②$c\sin A=3$，③$c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，请说明理由.

问题：是否存在$\triangle ABC$，它的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$C=\dfrac{\pi}{6}$，________？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题满分 12 分）

已知公比大于 1 的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_2+a_4=20$，$a_3=8$.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 记 b_m 为$\{a_n\}$在区间$(0,m]$($m\in\mathbf{N}^*$)中的项的个数，求数列$\{b_m\}$的前 100 项和 S_{100}.

19. (本小题满分 12 分)

为加强环境保护,治理空气污染,环境监测部门对某市空气质量进行调研,随机抽查了 100 天空气中的 $PM_{2.5}$ 和 SO_2 浓度(单位:$\mu g/m^3$),得下表:

$PM_{2.5}$ \ SO_2	[0,50]	(50,150]	(150,475]
[0,35]	32	18	4
(35,75]	6	8	12
(75,115]	3	7	10

(1) 估计事件"该市一天空气中 $PM_{2.5}$ 浓度不超过 75,且 SO_2 浓度不超过 150"的概率;

(2) 根据所给数据,完成下面的 2×2 列联表:

$PM_{2.5}$ \ SO_2	[0,150]	(150,475]
[0,75]		
(75,115]		

(3) 根据(2)中的列联表,判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 $PM_{2.5}$ 浓度与 SO_2 浓度有关?

附:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

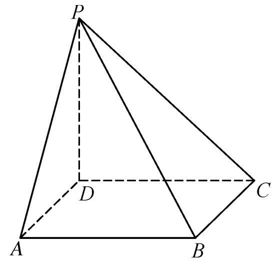
$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.050	0.010	0.001
x_0	3.841	6.635	10.828

20.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形，$PD\perp$底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.

（1）求证：$l\perp$平面 PDC；

（2）已知 $PD=AD=1$，Q 为 l 上的点，求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x+\ln a$.

（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若 $f(x)\geqslant 1$，求 a 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,且过点 $A(2,1)$.

（1）求 C 的方程；

（2）点 M,N 在 C 上,且 $AM\perp AN$,$AD\perp MN$,D 为垂足.求证：存在定点 Q,使得 DQ 为定值.

2020 年普通高等学校招生全国统一考试 · 新高考卷Ⅱ

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{1,2,3,5,8\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $\{1,3,5,7\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{2,3,5\}$　　D. $\{1,2,3,5,7,8\}$

2. $(1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=$ （　　）

A. $4+5\mathrm{i}$　　B. $5\mathrm{i}$　　C. $-5\mathrm{i}$　　D. $2+3\mathrm{i}$

3. 在$\triangle ABC$ 中，D 是边 AB 的中点，则 $\overrightarrow{CB}=$ （　　）

A. $2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}$　　B. $\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}$

C. $2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$　　D. $\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CA}$

4. （同新高考卷Ⅰ第 4 题）日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球（球心记为 O），地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面. 在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北纬 40°，则晷针与点 A 处的水平面所成角为 （　　）

A. 20°　　B. 40°　　C. 50°　　D. 90°

5. （同新高考卷Ⅰ第 5 题）某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有 96％的学生喜欢足球或游泳，60％的学生喜欢足球，82％的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 （　　）

A. 62％　　B. 56％　　C. 46％　　D. 42％

6. 要安排 3 名学生到 2 个乡村做志愿者，每名学生只能选择去一个村，每个村里至少有一名志愿者，则不同的安排方法共有 （　　）

A. 2 种　　B. 3 种　　C. 6 种　　D. 8 种

7. 已知函数 $f(x)=\lg(x^2-4x-5)$在$(a,+\infty)$上单调递增，则 a 的取值范围是 （　　）

A. $(2,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$

C. $(5,+\infty)$　　D. $[5,+\infty)$

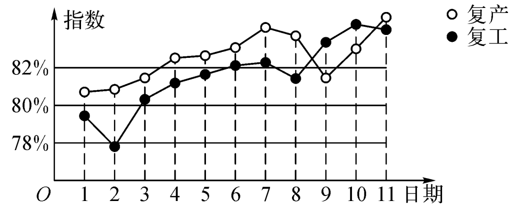
8. （同新高考卷Ⅰ第 8 题）若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 （　　）

A. $[-1,1]\cup[3,+\infty)$　　B. $[-3,-1]\cup[0,1]$

C. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　D. $[-1,0]\cup[1,3]$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 下面是某地连续 11 天复工复产指数折线图，下列说法正确的是 （　　）



A. 这 11 天的复工指数和复产指数均逐日增加

B. 这 11 天期间，复产指数的增量大于复工指数的增量

C. 第 3 天至第 11 天的复工复产指数均超过 80%

D. 第 9 天至第 11 天复产指数的增量大于复工指数的增量

10. (同新高考卷Ⅰ第 9 题)已知曲线 C：$mx^2+ny^2=1$. （　　）

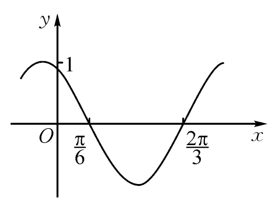
A. 若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

B. 若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为$\sqrt{n}$

C. 若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{n}}x$

D. 若 $m=0$，$n>0$，则 C 是两条直线

11. (同新高考卷Ⅰ第 10 题)右图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象，则 $\sin(\omega x+\varphi)=$ （　　）



A. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

B. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

C. $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

D. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-2x\right)$

12. (同新高考卷Ⅰ第 11 题)已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则 （　　）

A. $a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$　　　　B. $2^{a-b}>\dfrac{1}{2}$

C. $\log_2 a+\log_2 b\geqslant-2$　　　　D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

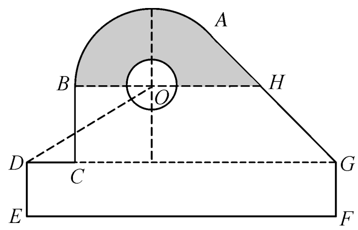
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M，N 分别为 BB_1，AB 的中点，则三棱锥 $A-NMD_1$ 的体积为________.

14. (同新高考卷Ⅰ第 13 题)斜率为$\sqrt{3}$的直线过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，且与 C 交于 A，B 两点，则$|AB|=$________.

15. (同新高考卷Ⅰ第 14 题)将数列$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$,则$\{a_n\}$的前 n 项和为________.

16. (同新高考卷Ⅰ第 15 题)某中学开展劳动实习,学生加工制作零件,零件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的圆心,A 是圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与直线 AG 的切点,B 是圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与直线 BC 的切点,四边形 $DEFG$ 为矩形,$BC\perp DG$,垂足为 C,$\tan\angle ODC=\dfrac{3}{5}$,$BH/\!/DG$,$EF=12\text{ cm}$,$DE=2\text{ cm}$,$A$ 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm,圆孔半径为 1 cm,则图中阴影部分的面积为________ cm^2.



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)(同新高考卷Ⅰ第 17 题)

在①$ac=\sqrt{3}$,②$c\sin A=3$,③$c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,若问题中的三角形存在,求 c 的值;若问题中的三角形不存在,请说明理由.

问题:是否存在$\triangle ABC$,它的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$,$C=\dfrac{\pi}{6}$,________?

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18.（本小题满分 12 分）

已知公比大于 1 的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_2+a_4=20$，$a_3=8$.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求 $a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$.

19.（本小题满分 12 分）（同新高考卷Ⅰ第 19 题）

为了加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了 100 天空气中的 $PM_{2.5}$ 和 SO_2 浓度（单位：$\mu g/m^3$），得下表：

SO_2 / $PM_{2.5}$	[0,50]	(50,150]	(150,475]
[0,35]	32	18	4
(35,75]	6	8	12
(75,115]	3	7	10

(1) 估计事件“该市一天空气中 $PM_{2.5}$ 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150”的概率；

(2) 根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表：

SO_2 / $PM_{2.5}$	[0,150]	(150,475]
[0,75]		
(75,115]		

(3) 根据(2)中的列联表，判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 $PM_{2.5}$ 浓度与 SO_2 浓度有关？

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

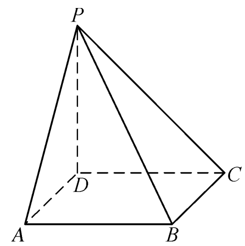
$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.050	0.010	0.001
x_0	3.841	6.635	10.828

20.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形，$PD\perp$底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.

（1）证明：$l\perp$平面 PDC；

（2）已知 $PD=AD=1$，Q 为 l 上一点，$QB=\sqrt{2}$，求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$且过点 $M(2,3)$，点 A 为其左顶点，且 AM 的斜率为$\dfrac{1}{2}$.

（1）求 C 的方程；

（2）N 为椭圆上任意一点，求$\triangle AMN$ 的面积的最大值.

22.（本小题满分 12 分）（同新高考卷Ⅰ第 21 题）

已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x+\ln a$.

(1) 当 $a=\mathrm{e}$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

(2) 若 $f(x)\geqslant 1$，求 a 的取值范围.

2025 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷 I

1. C　因为 $(1+5i)i=i+5i^2=i-5=-5+i$，所以 $(1+5i)i$ 的虚部为 1.

2. C　因为 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{1,3,5\}$，所以 $\complement_U A=\{2,4,6,7,8\}$，故 $\complement_U A$ 中元素的个数为 5.

3. D　**解法 1**　依题意得 $2b=\sqrt{7}\times 2a$，即 $\frac{b}{a}=\sqrt{7}$，所以 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+7}=2\sqrt{2}$，即双曲线 C 的离心率为 $2\sqrt{2}$.

解法 2(排除法)　由题意得 $c>b=\sqrt{7}a$，故双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}>\sqrt{7}$. 因为选项 A,B,C 都小于或等于 $\sqrt{7}$，所以正确选项为 D.

4. B　**解法 1**　因为函数 $y=\tan x$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，所以 $a-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}$，即 $a=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$. 又 $a>0$，所以当 $k=0$ 时，得 a 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

解法 2(定义法)　因为点 $(a,0)(a>0)$ 是函数 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心，由对称中心的定义，对定义域内的任意 t，有 $2\tan\left(2a-t-\frac{\pi}{3}\right)+2\tan\left(t-\frac{\pi}{3}\right)=0$. 令 $t=\frac{\pi}{3}$，即得 $2\tan\left(2a-\frac{2\pi}{3}\right)=0$，故 $a=\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{N})$. 因此 a 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

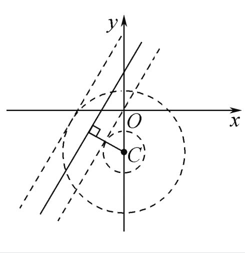
易错警示　正切函数 $y=\tan x$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，而不是 $(k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$.

5. A　依题意有 $f(-x)=f(x)$，$f(x+2)=f(x)$，所以 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}+2\right)=f\left(\frac{11}{4}\right)=5-2\times\frac{11}{4}=-\frac{1}{2}$.

6. A　视风风速 $=(-3,-1)$，船速 $=(1,3)$. 因为视风风速 = 真风风速 + 船行风速 = 真风风速 − 船速，所以真风风速 = 视风风速 + 船速 $=(-3,-1)+(1,3)=(-2,2)$，所以 |真风风速| $=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}\in(1.6,3.3)$，因此该时刻的真风为轻风.

7. B　**【启发式分析】**到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点在与该直线平行且相距为 1，分布在该直线的两侧的两条直线上，其中一条与圆相交，另一条与圆相离.

解法 1　圆心 $C(0,-2)$ 到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离 $d=\frac{|\sqrt{3}\times 0-(-2)+2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=2$，所以要使圆上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有两个，则 $d-1<r$ 且 $d+1>r$，即 $1<r<3$.



【启发式分析】研究圆上的点到直线的距离问题转化为圆心到直线的距离. 为此，通过讨论直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 与圆是否有公共点来解决问题.

解法 2　因为圆心 $C(0,-2)$ 到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离 $d=\frac{|\sqrt{3}\times 0-(-2)+2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=2$，当直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 与圆无公共点时，要使得圆上有且只有两个点到直线的距离等于 1，则 $1<r<2$；当直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 与圆有公共点时，要使得圆上有且只有两个点到直线的距离等于 1，则 $2\leqslant r<3$. 综上，$1<r<3$.

易错警示　一条直线与圆相交不会忘记，另一条直线与圆相离可能会忘记. 若这样的点有 4 个，则两条直线与圆都要相交.

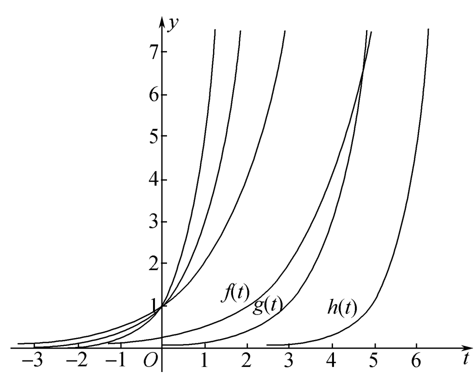
8. B　**【启发式分析】**如何处理三个式子连等的问题？一般地，可根据它们相等将它们转化为同一个变量来加以处理.

解法 1　令 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=t$，则 $x=2^{t-2}$，$y=3^{t-3}$，$z=5^{t-5}$. ①当 $t=2$ 时，$x=2^0=1$，$y=3^{-1}=\frac{1}{3}$，$z=5^{-3}=\frac{1}{125}$，有 $x>y>z$，此时 A 成立；②当 $t=5$ 时，$x=2^3=8$，$y=3^2=9$，$z=5^0=1$，有 $y>x>z$，此时 C 成立；③当 $t=8$ 时，$x=2^6=64$，$y=3^5=243$，$z=5^3=125$，有 $y>z>x$，此时 D 成立. 下面验证 B：若 $z>y$，即 $5^{t-5}>3^{t-3}$，解得 $t>\frac{\ln\frac{5^5}{3^3}}{\ln\frac{5}{3}}$，此时 $\frac{y}{x}=\frac{3^{t-3}}{2^{t-2}}=\frac{3^{t-3}}{2\cdot 2^{t-3}}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{t-3}>\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\ln\frac{5^5}{3^3}}{\ln\frac{5}{3}}-3}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\ln 25}{\ln\frac{5}{3}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2\ln 5}{\ln 5-\ln 3}}>\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2\ln 5}{\ln 5}}=\frac{9}{8}>1$，即 $y>x$，所以 x,y,z 的大小关系不可能为 B.

【启发式分析】以其中一个变量为元，用它来表示其他两个变量.

解法 2　因为 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，所以 $y=3^{\log_2 x-1}$，$z=5^{\log_2 x-3}$. 取 $x=1$，则 $y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{125}$，此时 $x>y>z$，故 A 有可能成立；取 $x=8$，则 $y=9$，$z=1$，此时 $y>x>z$，故 C 有可能成立；取 $x=64$，则 $y=243$，$z=125$，此时 $y>z>x$，故 D 有可能成立. 从而选 B.

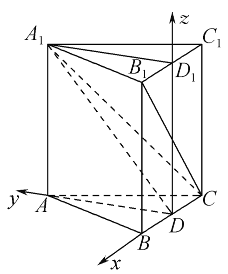
解法 3(图象法)　令 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=t$，则 $x=2^{t-2}$，$y=3^{t-3}$，$z=5^{t-5}$. 设函数 $f(t)=2^{t-2}$，$g(t)=3^{t-3}$，$h(t)=5^{t-5}$. 由图象平移可画出草图如下图. 可以看出，当 $t\leqslant 3$ 时，$f(t)>g(t)$，而 $g(t)$ 底数更大，增长更快，必然在某点 (t_1) 追上 $f(t)$，且当 $t>t_1$ 时，$g(t)>f(t)$. 同理，$h(t)$ 也会追上并超过前两个函数，关键是在何处超过. 设 $h(t_2)=f(t_2)$，$h(t_3)=g(t_3)$. 先分析 t_1 与 5 的大小关系. 因为 $f(5)=2^3<3^2=g(5)$，所以 $t_1<5$，从而根据图象趋势可以看出 $t_1<t_2<t_3$. 因此，当 $t<t_1$ 时，A 成立；当 $t_1<t<t_2$ 时，C 成立；当 $t_2<t<t_3$ 时，D 成立. B 不成立.



解后反思　1. 三个值相等的条件怎么使用，一般设为 t，然后用 t 分别表示 x,y,z，再根据 t 的不同取值得到不同的 x,y,z 的大小关系；

2. 考试时，用排除法得到答案，不必验证.

9. BD **解法 1** 如图，设 D_1 为 B_1C_1 的中点. 对于 A，由题意易知 $AD\perp AA_1$，若 $AD\perp A_1C$，则由 $AA_1\cap A_1C=A_1$，AA_1，$A_1C\subset$平面 AA_1C_1C，可得 $AD\perp$平面 AA_1C_1C，$AC\subset$平面 AA_1C_1C，从而得 $AD\perp AC$，这与$\triangle ABC$ 为正三角形矛盾，故 A 错误；对于 B，由题意易知 $AD\perp BC$，$AA_1\perp BC$，$AD\cap AA_1=A$，AD，$AA_1\subset$平面 AA_1D，所以 $BC\perp$平面 AA_1D，又 $BC/\!/B_1C_1$，所以 $B_1C_1\perp$平面 AA_1D，故 B 正确；对于 C，由题意知 $AD/\!/A_1D_1$，若 $AD/\!/A_1B_1$，则 $A_1D_1/\!/A_1B_1$，矛盾，故 C 错误；对于 D，由题意知 $CC_1/\!/AA_1$，又 $CC_1\not\subset$平面 AA_1D，$AA_1\subset$平面 AA_1D，所以 $CC_1/\!/$平面 AA_1D，故 D 正确.



解法 2 设正三棱柱底面边长为 2，高为 h，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$A(0,\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$C(-1,0,0)$，$C_1(-1,0,h)$，$B_1(1,0,h)$，$A_1(0,\sqrt{3},h)$，$\overrightarrow{AD}=(0,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(-1,-\sqrt{3},-h)$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{A_1C}=3$，故选项 A 错误；$\overrightarrow{B_1C_1}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,h)$，$\overrightarrow{B_1C_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$，$\overrightarrow{B_1C_1}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，所以 $AA_1\perp B_1C_1$，$AD\perp B_1C_1$，又 $AA_1\cap AD=A$，AA_1，$AD\subset$平面 AA_1D，所以 $B_1C_1\perp$平面 AA_1D，故选项 B 正确；$\overrightarrow{AD}=(0,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(1,-\sqrt{3},0)$，显然选项 C 错误；因为在正三棱柱中，$CC_1/\!/AA_1$，$CC_1\not\subset$平面 AA_1D，$AA_1\subset$平面 AA_1D，所以 $CC_1/\!/$平面 AA_1D，故选项 D 正确.

解后反思 空间向量法的特点是将几何关系转化为数量关系来直接进行判断，而几何综合法重在推理.

10. ACD 对于 A，由抛物线定义可知 $|AD|=|AF|$，故 A 正确. 对于 B，当 $AB\perp x$ 轴时，易知 $A\left(\frac{3}{2},3\right)$，$B\left(\frac{3}{2},-3\right)$，所以 $|AB|=6$，$|AE|=3\sqrt{2}\neq|AB|$，故 B 错误. 对于 C，

解法 1 设直线 AB 的方程为 $x=my+\frac{3}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x=my+\frac{3}{2},\\ y^2=6x,\end{cases}$ 消去 x 可得 $y^2-6my-9=0$，则 $y_1+y_2=6m$，$y_1y_2=-9$，$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+3=6m^2+3$，$|AB|=x_1+\frac{3}{2}+x_2+\frac{3}{2}=6m^2+6\geqslant6$（另解：$|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=6(m^2+1)\geqslant6$），故 C 正确.

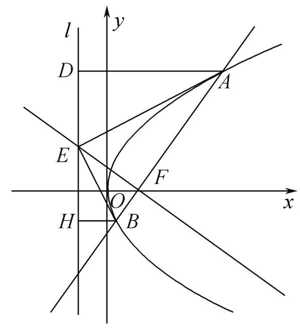
解法 2 设直线 AB 的倾斜角为 θ，则 $|AF|\cos\theta+3=|AD|$，故 $|AF|=\frac{3}{1-\cos\theta}$，同理 $|BF|=\frac{3}{1+\cos\theta}$. 所以 $|AB|=\frac{3}{1-\cos\theta}+\frac{3}{1+\cos\theta}=\frac{6}{\sin^2\theta}\geqslant6$，当且仅当 $\theta=90°$时，等号成立，故 C 正确.

对于 D，

审题指导 **直接求 $|AE|$，$|BE|$ 是比较复杂的，为此，进行转化. 注意到它们是$\triangle ABE$ 的两条边，所以联想到面积. 先判断$\angle AEB$ 的大小，可以用代数法和几何法来进行.**

解法 1 当 $m\neq0$ 时，直线 EF 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+\frac{3}{2}$，则 $E\left(-\frac{3}{2},3m\right)$，$|EF|=\sqrt{9+9m^2}$，$S_{\triangle AEB}=\frac{1}{2}|AE|\cdot|BE|\sin\angle AEB=\frac{1}{2}|AB|\cdot|EF|=\frac{1}{2}(6m^2+6)\sqrt{9+9m^2}>\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{9}=9$，所以 $|AE|\cdot|BE|>\frac{18}{\sin\angle AEB}\geqslant18$；当 $m=0$ 时，$|AE|=|BE|=3\sqrt{2}$，$|AE|\cdot|BE|=18$. 综上，$|AE|\cdot|BE|\geqslant18$，故 D 正确.

解法 2（几何法） 过点 B 作 $BH\perp l$，垂足为 H. 由抛物线的定义知 $|AD|=|AF|$. 又 $|AE|=|AE|$，$\angle ADE=\angle AFE=90°$，所以$\triangle ADE\cong\triangle AFE$，所以$\angle AED=\angle AEF$，同理，$\angle BEF=\angle BEH$，所以$\angle AEB=\frac{\pi}{2}$. 由 $S_{\triangle AEB}=\frac{1}{2}|AE|\cdot|BE|=\frac{1}{2}|AB|\cdot|EF|$，得 $|AE|\cdot|BE|=|AB|\cdot|EF|$，当 $AB\perp x$ 轴时，$|AB|$，$|EF|$ 同时取得最小值，此时 $|EF|=3$，$|AB|=6$，故 $|AE|\cdot|BE|\geqslant3\times6=18$，故 D 正确.



解后反思 通径是最短的焦点弦是熟知的结论，所以易判断选项 C 正确；直观上看，当 $AB\perp x$ 轴时，$\frac{1}{2}|AB|\cdot|EF|$ 最小，即 $\frac{1}{2}|AE|\cdot|BE|\sin\angle AEB$ 最小且此时 $\sin\angle AEB$ 达到最大，所以此时 $|AE|\cdot|BE|$ 取到最小值 18，故选项 D 正确.

11. ABC **【启发式分析】**对比条件 $\cos2A+\cos2B+2\sin C=2$ 与选项 A，自然联想到用余弦二倍角公式进行转化.

由 $\cos2A+\cos2B+2\sin C=2$，得 $1-2\sin^2A+1-2\sin^2B+2\sin C=2$，所以 $\sin^2A+\sin^2B=\sin C$，故 A 正确.

【启发式分析】由选项 A 和 D 的结构特征，猜想此三角形是直角三角形，因为如果 C 为直角，那么选项 A 就是 $\sin^2C=\sin^2A+\sin^2B$，如何证明这个猜想？

解法 1 由 $\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}>0$，知 A，B 为锐角. 如果 C 为钝角，那么 $\sin^2A+\sin^2B=\sin C>\sin^2C$，得 $a^2+b^2>c^2$，则 $\cos C>0$，矛盾；如果 C 为锐角，那么 $A+B>\frac{\pi}{2}$，$A>\frac{\pi}{2}-B>0$，$\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B>0$，$\sin C=\sin^2A+\sin^2B>\cos^2B+\sin^2B=1$，矛盾，所以 C 为直角.

解法 2 因为 $\sin^2A+\sin^2B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，所以 $\sin A(\sin A-\cos B)+\sin B(\sin B-\cos A)=0$. 由 $\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}>0$，知 A，B 为锐角，所以 $\sin A>0$，$\sin B>$

0，不妨设 $\begin{cases}\sin A-\cos B\geqslant 0,\\ \sin B-\cos A\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\cos B\leqslant\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right),\\ \cos A\geqslant\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right),\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}B\geqslant\frac{\pi}{2}-A,\\ A\leqslant\frac{\pi}{2}-B,\end{cases}$ 即 $\frac{\pi}{2}\leqslant A+B\leqslant\frac{\pi}{2}$，故 $A+B=\frac{\pi}{2}$，即 $C=\frac{\pi}{2}$，反之亦然.

解法 1 由 $\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$ 得 $\cos A\cos B=\frac{1}{4}$，由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}$ 得 $ab=\frac{1}{2}$，即 $c\cos B\cdot c\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{4}c^2=\frac{1}{2}$，则 $c=AB=\sqrt{2}$，故 B 正确. 由勾股定理知，$AC^2+BC^2=AB^2=2$，故 D 错误. 因为角 A,B 互余，所以 $(\sin A+\sin B)^2=\sin^2A+\sin^2B+2\sin A\sin B=\sin^2A+\cos^2A+2\cos B\cos A=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. 又 $\sin A+\sin B>0$，所以 $\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 C 正确.

解法 2 因为 $A+B=\frac{\pi}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{2}-A$，$C=\frac{\pi}{2}$，从而由 $\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$ 得 $\sin A\cos A=\frac{1}{4}$，即 $\sin 2A=\frac{1}{2}$，则 $a=c\sin A$，$b=c\cos A$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2\sin A\cos A=\frac{1}{4}c^2\sin 2A=\frac{1}{8}c^2=\frac{1}{4}$，故 $c=AB=\sqrt{2}$，故 B 正确. $AC^2+BC^2=AB^2=2$，故 D 错误. 因为 $\sin 2A=\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{5\pi}{12}$，所以 $\sin A+\sin B=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 C 正确.

解后反思 本题的难点在于判断 $C=\frac{\pi}{2}$，它是解题的题眼，解题中应用了反证法的思维. 这进一步体现了现在高考对思维能力的要求，体现了多思考、少计算的特征.

12. 4 设切点 $P(x_0,e^{x_0}+x_0+a)$，$y'=e^x+1$，切线的斜率 $e^{x_0}+1=2$，得 $x_0=0$，所以 $P(0,a+1)$，代入切线方程得 $a+1=0+5$，得 $a=4$.

13. 2 **解法 1（利用求和公式）** 由题易知 $q\neq 1$，所以 $\begin{cases}\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=4,\\ \frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=68,\end{cases}$ 所以 $1-q^8=17(1-q^4)$，得 $(1+q^4)(1-q^4)=17(1-q^4)$，所以 $1+q^4=17$，$q^4=16$，$q=\pm 2$. 又等比数列的各项均为正数，所以 $q>0$，故 $q=2$.

解法 2（利用通项公式） $S_8=a_1+a_2+\cdots+a_8=S_4+q^4S_4$，将 S_4，S_8 的值代入，得 $68=4+4q^4$，所以 $q^4=16$，$q=\pm 2$. 又等比数列的各项均为正数，所以 $q>0$，故 $q=2$.

14. $\frac{61}{25}$ **解法 1** X 所有可取的值为 1，2，3，$X=1$ 即三次取的球的标号相同，每次每个球被取到的概率都是 $\frac{1}{5}$，都取 $i(i=1,2,3,4,5)$ 号球的概率为 $\left(\frac{1}{5}\right)^3$，所以 $P(X=1)=5\times\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{25}$. $X=2$ 即三次取的球的标号有且仅有两个相同，先取出相同标号的取法有 5 种，再取出另一标号的取法有 4 种，这三个号（两个相同一个不同）的排列顺序有 3 种，所以 $P(X=2)=5\times 4\times 3\times\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{12}{25}$. $X=3$ 即三次取的球的标号都不相同，不同的排列顺序有 $A_5^3=60$ 种，所以 $P(X=3)=60\times\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{12}{25}$，所以 $E(X)=1\times\frac{1}{25}+2\times\frac{12}{25}+3\times\frac{12}{25}=\frac{61}{25}$.

解法 2 设 $X_i=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 号球至少被取到 1 次},\\ 0,\text{第 } i \text{ 号球一次都没有被取到},\end{cases}$ $i=1,2,3,4,5$，则 $X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$，所以 $E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)+E(X_5)$. 对每一个 X_i，每次取球时，不取到第 i 号球的概率是 $\frac{4}{5}$，有放回地取三次都没取到第 i 号球的概率是 $\left(\frac{4}{5}\right)^3$，那么至少取到一次第 i 号球的概率为 $1-\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{61}{125}$，所以 $E(X_i)=0\times\left(\frac{4}{5}\right)^3+1\times\frac{61}{125}=\frac{61}{125}$，所以 $E(X)=5\times\frac{61}{125}=\frac{61}{25}$.

15. 解：(1) 超声波检查结果不正常者有 200 人，这 200 人中患该疾病的有 180 人，所以 $p=\frac{180}{200}=\frac{9}{10}$.

(2) 零假设为 H_0：超声波检查结果与是否患该疾病无关，[1] $\chi^2=\frac{1000(20\times 20-180\times 780)^2}{800\times 200\times 200\times 800}=765.625>10.828$，根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为超声波检查结果与是否患该疾病有关.

规范书写【1】计算 χ^2 要先提出零假设 H_0：超声波检查结果与是否患该疾病无关.

16. (1) **审题指导 要证明数列 $\{na_n\}$ 是等差数列，只需证明 $(n+1)a_{n+1}-na_n$ 为常数，于是可将条件等式向这个目标变形.**

证法 1 将 $\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ 两边同乘 $n(n+1)$，得 $(n+1)a_{n+1}=na_n+1$，即 $(n+1)a_{n+1}-na_n=1$，所以 $\{na_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列.

证法 2 设 $b_n=na_n$，则 $b_1=3$. 由 $\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ 得 $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n+\frac{1}{n+1}$，故 $b_{n+1}=(n+1)a_{n+1}=na_n+1=b_n+1$. 因此数列 $\{b_n\}$ 是首项为 3，公差为 1 的等差数列，即数列 $\{na_n\}$ 是首项为 3，公差为 1 的等差数列.

证法 3 由 $\frac{a_n+1}{n}=\frac{a_n}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ 得 $\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，即 $\frac{a_{n+1}-1}{n}=\frac{a_n-1}{n+1}$，故 $(n+1)(a_{n+1}-1)=n(a_n-1)=\cdots=2(a_2-1)=a_1-1=2$，因此 $na_n=n+2$，即数列 $\{na_n\}$ 是首项为 3，公差为 1 的等差数列.

(2) **审题指导 先求出 $f'(-2)=a_1+2a_2\cdot(-2)+3a_3\cdot(-2)^2+\cdots+ma_m\cdot(-2)^{m-1}$，结合(1)的结果可知，这是一个“等差乘等比型”数列求和问题，可用错位相减法.**

解：由 $a_1=3$ 及(1)知，$\{na_n\}$ 是以 3 为首项，1 为公差的等差数列，所以 $na_n=n+2$. 对函数 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+ma_mx^{m-1}=3+4x+5x^2+\cdots+(m+2)x^{m-1}$，所以 $f'(-2)=3+4\times(-2)+5\times(-2)^2+\cdots+(m+2)\cdot(-2)^{m-1}$，两边同乘 -2，得 $-2f'(-2)=3\times(-2)+4\times(-2)^2+5\times(-2)^3+\cdots+(m+1)\cdot(-2)^{m-1}+(m+2)\cdot(-2)^m$，两式相减，得 $3f'(-2)=3+$

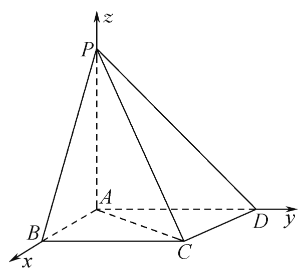
$[(-2)+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{m-1}]-(m+2)\cdot(-2)^m=3+\frac{-2\cdot[1-(-2)^{m-1}]}{1-(-2)}-(m+2)\cdot(-2)^m=\frac{7-(3m+7)(-2)^m}{3}$，所以 $f'(2)=\frac{7-(3m+7)(-2)^m}{9}$.

17.(1) **审题指导** **要证面面垂直，需要先证线面垂直，也就是要先找线线垂直.**

证明：因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$. 又因为 $AB\perp AD$，$AD\cap PA=A$，AD，$PA\subset$平面 PAD，[1]所以 $AB\perp$平面 PAD. 因为 $AB\subset$平面 PAB，所以平面 $PAB\perp$平面 PAD.

(2)① **审题指导** **球心 O 满足 $OB=OC=OD=OP$. 若球心 O 在平面 BCD 内，则它就是$\triangle BCD$ 的外心，所以只要找出$\triangle BCD$ 的外心，再证明它到点 B 的距离与到点 P 的距离相等即可. 用坐标法较为方便.**

证法 1 因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AD\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$，所以 AB，AD，AP 两两垂直，分别以 AB，AD，AP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



若只看 Axy 平面，作为平面直角坐标系，则 $B(\sqrt{2},0)$，$C(\sqrt{2},2)$，$D(0,\sqrt{3}+1)$. 易得线段 BC 的垂直平分线为直线 $y=1$. 线段 CD 的中点为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$，直线 CD 的斜率为$\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，所以线段 CD 的垂直平分线为直线 $y-\frac{\sqrt{3}+3}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 令 $y=1$，解得 $x=0$，所以$\triangle BCD$ 的外心 O'在空间直角坐标系中的坐标为$(0,1,0)$. 所以 $O'B=\sqrt{3}$. 又 $P(0,0,\sqrt{2})$，所以 $O'P=\sqrt{3}$，所以 $O'C=O'D=O'B=O'P$，即 O'就是球心 O，所以点 O 在平面 $ABCD$ 内.

审题指导 **由于球心 O 满足 $OB=OC=OD=OP$，在空间直角坐标系中，可设出球心 O 的坐标，代入上式求解即可判断.**

证法 2 同证法 1 建立空间直角坐标系，则 $B(\sqrt{2},0,0)$，$C(\sqrt{2},2,0)$，$D(0,\sqrt{3}+1,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$. 设球心 $O(x,y,z)$. 由 $OB=OC$，得$\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2+z^2}$，解得 $y=1$；由 $OB=OD$，得$\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-\sqrt{3}-1)^2+z^2}$，结合 $y=1$，得 $x=0$；由 $OB=OP$，得 $\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2}$，结合 $x=0$，得 $z=0$. 所以 $O(0,1,0)$，即点 O 在平面 $ABCD$ 内.

②解：$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},2,0)$，$\overrightarrow{PO}=(0,1,-\sqrt{2})$. 设直线 AC 与直线 PO 所成角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PO}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PO}|}{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{PO}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，[2]所以直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$.

规范书写 【1】证明 $AB\perp$平面 PAD 时，要写出证明线面垂直的所有条件.

【2】两直线所成的角与两直线的方向向量的夹角相等或互补，不要丢了绝对值符号.

解后反思 对于(2)②问，另解：由 $PA\perp$平面 $ABCD$，可知斜线 PO 在平面 $ABCD$ 内的射影为 AO，则$\angle POA$ 为直线 PO 与平面 $ABCD$ 所成角. 在 Rt$\triangle POA$ 中，$PA=\sqrt{2}$，$AO=1$，则 $PO=\sqrt{3}$，故 $\cos\angle POA=\frac{OA}{PO}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 过斜足 O 与直线 AC 平行的直线与射影 AO 的夹角等于$\angle CAD$，$\cos\angle CAD=\cos\angle ACB=\frac{2}{\sqrt{6}}$，直线 PO 与直线 AC 的夹角满足三余弦定理，设其夹角为 α，则 $\cos\alpha=\cos\angle POA\cdot\cos\angle CAD=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

18. 解：(1) 依题意知 $A(0,-b)$，$B(a,0)$，则 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$，即 $a^2+b^2=10$ ①. 又离心率为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $e^2=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{8}{9}$，即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{9}$ ②. 由①②解得 $a^2=9$，$b^2=1$，所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)①**【启发式分析】**求点 R 的坐标，可借助向量 $\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{AP}(\lambda\geqslant0)$，只需确定 λ 的值. 如何确定呢？可通过$|AP|\cdot|AR|=3$ 求得.

解法 1(设点法) 设 $R(x_0,y_0)$，又 $A(0,-1)$，$P(m,n)(m\neq0)$，设 $\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{AP}(\lambda\geqslant0)$，则$(x_0,y_0+1)=\lambda(m,n+1)$，所以 $x_0=\lambda m$，$y_0=\lambda(n+1)-1$. $|AP|=\sqrt{m^2+(n+1)^2}$，$|AR|=|\overrightarrow{AR}|=|\lambda\overrightarrow{AP}|=\lambda|\overrightarrow{AP}|=\lambda|AP|=\lambda\sqrt{m^2+(n+1)^2}$. 又$|AP|\cdot|AR|=3$，所以 $\sqrt{m^2+(n+1)^2}\cdot\lambda\sqrt{m^2+(n+1)^2}=3$，解得 $\lambda=\frac{3}{m^2+(n+1)^2}$，从而 $x_0=\lambda m=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$y_0=\lambda(n+1)-1=\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1=\frac{-m^2-n^2+n+2}{m^2+(n+1)^2}$，所以点 R 的坐标为$\left(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2},\frac{-m^2-n^2+n+2}{m^2+(n+1)^2}\right)$.

解法 2(设线法) 因为点 P 不在 y 轴上，所以设直线 AP 的方程为 $y=kx-1$. 因为 $A(0,-1)$，$P(m,n)$，所以 $k_{AP}=\frac{n+1}{m}$. 所以$|AP|=\sqrt{1+k^2}\,|m|$，$|AR|=\sqrt{1+k^2}\,|x_R|$，所以$|AP|\cdot|AR|=(1+k^2)|mx_R|=3$. 因为点 R 在射线 AP 上，所以 $mx_R>0$，故$(1+k^2)mx_R=\left[1+\left(\frac{n+1}{m}\right)^2\right]\cdot mx_R=3$，解得 $x_R=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，故 $y_R=\frac{n+1}{m}x_R-1=\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1=\frac{-m^2-n^2+n+2}{m^2+(n+1)^2}$，所以点 R 的坐标为$\left(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2},\frac{-m^2-n^2+n+2}{m^2+(n+1)^2}\right)$.

②**【启发式分析】**求$|PQ|$的最大值，首先必须了解 P 是怎样的点，即需求得点 P 的运动轨迹.

因为 $k_{OR}=3k_{OP}$，即 $\frac{-m^2-n^2+n+2}{3m}=3\cdot\frac{n}{m}$，整理得 $m^2+(n+4)^2=18(m\neq0)$，所以点 P 的运动轨迹是以 $D(0,-4)$为圆心，$3\sqrt{2}$为半径的圆，但要除去$(0,-4+3\sqrt{2})$和$(0,-4-3\sqrt{2})$两点.

【启发式分析】借助平面解析几何知识，可将问题转化为求椭圆上的点 Q 与点 P 的轨迹的圆心 D 的距离最大值，此时可借助函数来求得最大值.

设 $Q(x_1,y_1)$，则 $x_1^2+9y_1^2=9$，所以 $|QD|=\sqrt{x_1^2+(y_1+4)^2}=\sqrt{9-9y_1^2+(y_1+4)^2}=\sqrt{-8y_1^2+8y_1+25}=\sqrt{27-8\left(y_1-\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant 3\sqrt{3}$，当且仅当 $y_1=\frac{1}{2}$，即 $Q\left(\pm\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，$|QD|_{\max}=3\sqrt{3}$. 所以 $|PQ|_{\max}=|QD|_{\max}+r=3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$，当且仅当 Q,D,P 三点共线，且点 P 在 QD 的延长线上，此时点 P 不会是 $(0,-4+3\sqrt{2})$ 和 $(0,-4-3\sqrt{2})$.[1]

规范书写【1】要注意点 P 的运动轨迹的不完整性，最后在确定 $|PQ|$ 的最大值时，要说明点 P 不会是剔除的点 $(0,-4+3\sqrt{2})$ 和 $(0,-4-3\sqrt{2})$.

解后反思 1. 把向量共线作为解题工具；2. 将求轨迹方程(隐圆)融入其中，纵观整卷，解析几何的考查可谓面面俱到.

19. (1) **解法 1** 因为 $f(x)=5\cos x-\cos 5x,x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $f'(x)=-5\sin x+5\sin 5x=5(\sin 5x-\sin x)=5\times 2\cos 3x\cdot\sin 2x=10\sin 2x\cos 3x$. 因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $2x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$3x\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$，所以 $\sin 2x\geqslant 0$. 当 $0<3x<\frac{\pi}{2}$，即 $0<x<\frac{\pi}{6}$ 时，$\cos 3x>0$，所以 $f'(x)>0$；当 $\frac{\pi}{2}<3x<\frac{3\pi}{4}$，即 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$\cos 3x<0$，所以 $f'(x)<0$. 所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取极大值，也是最大值，故 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=5\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

解法 2 $f(x)=5\cos x-\cos 5x,x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，令 $f'(x)=-5\sin x+5\sin 5x=5(\sin 5x-\sin x)=0$，则 $\sin 5x=\sin x$，即 $5x=2k\pi+x$ 或 $5x=2k\pi+(\pi-x)(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}$ 或 $x=\frac{2k\pi+\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $x=0$ 或 $x=\frac{\pi}{6}$. 又 $f(0)=5\cos 0-\cos 0=4$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=5\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}=3\sqrt{3}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=5\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{4}=3\sqrt{2}$. 因为连续函数在闭区间上的最值只能在区间端点或极值点处取得，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$.

(2)【启发式分析】因为是存在性证明，所以只要找到 y 的取值，使得 $\cos y=\cos\theta$ 或 $\cos y<\cos\theta$ 即可.

证法 1 因为余弦函数的最小正周期为 2π，所以不妨设 $a\in[0,2\pi)$. ①当 $0\leqslant a<2\theta$ 时，$a-\theta<\theta$，即 $\theta\in(a-\theta,a+\theta]$，取 $y=\theta$，此时有 $\cos y=\cos\theta$. ②当 $2\theta\leqslant a<2\pi$ 时，$\theta\leqslant a-\theta<2\pi-\theta$. 因为余弦函数 $g(x)=\cos x$ 在 $(0,\pi]$ 上单调递减，在 $[\pi,2\pi)$ 上单调递增. 在 $(0,2\pi)$ 上，$g(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，所以 $g(\theta)=g(2\pi-\theta)$，即 $\cos\theta=\cos(2\pi-\theta)$. 又 $0<\theta\leqslant a-\theta<2\pi-\theta<2\pi$，所以总有 $\cos\theta\geqslant\cos(a-\theta)$，取 $y=a-\theta$，此时有 $\cos y\leqslant\cos\theta$. 综合①②，可证得存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$，使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$.

证法 2(反证法) 假设原命题不成立，则给定 $\theta\in(0,\pi)$，任意 $y\in[a-\theta,a+\theta]$，都有 $\cos y>\cos\theta$ 成立. 由 $\cos y>\cos\theta$ 成立，得 $y\in(-\theta+2k\pi,\theta+2k\pi),k\in\mathbf{Z}$，所以存在某个整数 k，使得 $[a-\theta,a+\theta]\subseteq(-\theta+2k\pi,\theta+2k\pi)$. 定义一个区间 (a,b) 的长度为 $b-a$，则区间 $[a-\theta,a+\theta]$，$(-\theta+2k\pi,\theta+2k\pi)$ 的长度均为 2θ，故闭区间 $[a-\theta,a+\theta]$ 是不可能包含于开区间 $(-\theta+2k\pi,\theta+2k\pi)$ 的，这就与 $[a-\theta,a+\theta]\subseteq(-\theta+2k\pi,\theta+2k\pi)$ 矛盾，故原命题成立.

(3) **审题指导 要求实数 b 的最小值，就要通过调整参数 φ 的值，使得函数 $h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$ 的最大值尽可能地小，这个最小的最大值就是 b 的最小值. 其过程：①求极值点；②求极值点的函数值；③分析最大值；④调整参数 φ 的值，使得函数的最大值尽可能地小.**

解法 1 设 $h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$，则 $h'(x)=-5\sin x+5\sin(5x+\varphi)=5[\sin(5x+\varphi)-\sin x]$，令 $h'(x)=0$，则 $\sin(5x+\varphi)=\sin x$，即 $5x+\varphi=2k\pi+x$ 或 $5x+\varphi=2k\pi+(\pi-x)(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{2k\pi-\varphi}{4}$ 或 $x=\frac{(2k+1)\pi-\varphi}{6}(k\in\mathbf{Z})$. 因为余弦函数的最小正周期为 2π，所以不妨设 $\varphi\in[0,2\pi)$. ①当 $x=\frac{2k\pi-\varphi}{4}$，即 $5x+\varphi=x+2k\pi$ 时，$h(x)=5\cos x-\cos(2k\pi+x)=4\cos x\leqslant 4$. ②当 $x=\frac{(2k+1)\pi-\varphi}{6}$，即 $5x+\varphi=(2k+1)\pi-x$ 时，$h(x)=5\cos x-\cos[(2k+1)\pi-x]=6\cos x$. 取 $k=0$，$x=\frac{\pi-\varphi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，$h(x)=6\cos x\geqslant 3\sqrt{3}>4$. 当 $\varphi=0$ 时，$x=\frac{(2k+1)\pi}{6}$，$h(x)=6\cos x=6\cos\frac{(2k+1)\pi}{6}=6\cos\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)(k\in\mathbf{Z})$，$k=0$，$h(x)=6\cos\frac{\pi}{6}=3\sqrt{3}$；$k=1$，$h(x)=6\cos\frac{\pi}{2}=0$；$k=2$，$h(x)=6\cos\frac{5\pi}{6}=-3\sqrt{3}$；$k=3$，$h(x)=6\cos\frac{7\pi}{6}=-3\sqrt{3}$；$k=4$，$h(x)=6\cos\frac{3\pi}{2}=0$；$k=5$，$h(x)=6\cos\frac{11\pi}{6}=3\sqrt{3}$. 所以 $h(x)_{\max}=3\sqrt{3}$，所以 $b\geqslant 3\sqrt{3}$，即 $b_{\min}=3\sqrt{3}$.

解法 2 设 $h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$，因为余弦函数的最小正周期为 2π，所以不妨设 $\varphi\in[0,2\pi)$. ①当 $\varphi=0$ 时，$h(x)=5\cos x-\cos 5x=5\cos x-(16\cos^5x-20\cos^3x+5\cos x)=20\cos^3x-16\cos^5x$. 令 $t=\cos x\in[-1,1]$，$\varphi(t)=20t^3-16t^5$，则 $\varphi(t)$ 为奇函数，$\varphi'(t)=60t^2-80t^4=20t^2(\sqrt{3}+2t)(\sqrt{3}-2t)$. 当 $t\in\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时，$\varphi'(t)<0$，当 $t\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时，$\varphi'(t)>0$，当 $t\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ 时，$\varphi'(t)<0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ 上单调递减，故 $\varphi(t)$ 的极大值为 $\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}$. 又 $\varphi(-1)=-4<\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}$，所以 $\varphi(t)$ 的最大值为 $3\sqrt{3}$，即 $h(x)_{\max}=3\sqrt{3}$，此时 $b\geqslant 3\sqrt{3}$，所以 $b_{\min}=3\sqrt{3}$. ②当 $0<\varphi<2\pi$ 时，$h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$，取 $x_0=\frac{\pi-\varphi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$，则 $5x_0+\varphi=\pi-x_0$，所以 $h(x_0)=5\cos x_0-\cos(5x_0+\varphi)=5\cos x_0-\cos(\pi-x_0)=5\cos x_0+\cos x_0=6\cos x_0>3\sqrt{3}$，即 $h(x)_{\max}>3\sqrt{3}$，所以 $b>3\sqrt{3}$，$b_{\min}>3\sqrt{3}$. 综合①②，存在 $\varphi=0$，使得 $b_{\min}=3\sqrt{3}$.

解法 3 **审题指导 注意到** $5\cos x-\cos(5x+\varphi)=5\cos x-$

$\cos 5x+[\cos 5x-\cos(5x+\varphi)]$，**为此，利用第(1)问以及第(2)问的结论来处理.**

由(2)知，令 $a=t$，$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$，则 $\exists y\in\left[t-\dfrac{5\pi}{6},t+\dfrac{5\pi}{6}\right]$，使得 $\cos y\leqslant\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 由 $y\in\left[t-\dfrac{5\pi}{6},t+\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 知，$\exists x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$，使得 $5x+t=y$，即 $\cos(5x+t)\leqslant-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $5\cos x-\cos(5x+t)\geqslant 5\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\geqslant 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，因此，若 $b<3\sqrt{3}$，则对任意实数 t，存在 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$，使得 $5\cos x-\cos(5x+t)\geqslant 3\sqrt{3}>b$，故此时 b 不满足要求. 若 $b=3\sqrt{3}$，则存在 $t=0$，使得 $5\cos x-\cos 5x\leqslant b$. 易知，$f(x)=5\cos x-\cos 5x$ 是周期为 2π 的偶函数，为此，考虑它在 $[0,\pi]$上的最大值. $f'(x)=10\sin 2x\cos 3x$. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{6}$ 时，有 $\cos 3x>0$，$\sin 2x>0$，从而有 $f'(x)>0$；当 $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\cos 3x<0$，$\sin 2x>0$，从而有 $f'(x)<0$；当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{5\pi}{6}$ 时，有 $\cos 3x>0$，$\sin 2x<0$，从而有 $f'(x)<0$；当 $\dfrac{5\pi}{6}<x<\pi$ 时，有 $\cos 3x<0$，$\sin 2x<0$，从而有 $f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{5\pi}{6},\pi\right)$ 上单调递增. 因为 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$，$f(\pi)=-4$，所以 $f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$. 故 $5\cos x-\cos 5x\leqslant 3\sqrt{3}$ 恒成立，故 b 的最小值为 $3\sqrt{3}$.

解后反思 解答第(2)问的关键是对 a 的取值范围的约束，根据周期性可以将 a 限制在 $[0,2\pi)$ 内. 第(3)问首先要过逻辑关，属于存在任意型双逻辑问题，本质是求左边函数最大值中的最小值.

2025 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅱ

1. C $\bar{x}=\dfrac{2+8+14+16+20}{5}=12$.

2. A $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}-1}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

3. D 因为 $B=\{x\mid x(x-1)(x+1)=0\}=\{0,-1,1\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$.

4. C 由 $\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2$，得 $2-\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{x+2}{x-1}\leqslant 0$，即 $(x+2)(x-1)\leqslant 0$ 且 $x-1\neq 0$，解得 $-2\leqslant x<1$.

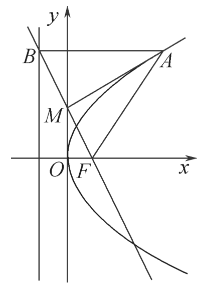
5. A **解法 1** 由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\times(1+\sqrt{3})\times\sqrt{6}}=\dfrac{2\times(\sqrt{3}+3)}{2\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+3)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{4}$.

解法 2 由题设得 $BC<AB<AC$，所以 $A<C<B$. 因为 $A+B+C=\pi$，所以 $A<\dfrac{\pi}{3}$，通过选项可以判断 $A=\dfrac{\pi}{4}$.

6. C **解法 1** $l_{BF}:y=-2x+2$ 交 x 轴于点 $F(1,0)$，则 $\dfrac{p}{2}=1$，即 $p=2$，所以 $y^2=4x$. 将 $x=-1$ 代入直线 BF 的方程，得 $B(-1,4)$，所以 $y_A=4$，所以 $x_A=4$，所以 $|AF|=x_A+\dfrac{p}{2}=5$.

解法 2 设 BF 与 y 轴交于点 M，又因为 $x_B=-x_F$，所以 M 为 BF 中点，由抛物线的定义得 $|AF|=|AB|$，所以 $AM\perp BF$，且 $\angle AFM=\angle ABM=\angle MFG$，从而 $\triangle AMF\backsim\triangle MOF$，所以 $\dfrac{AF}{MF}=\dfrac{MF}{OF}$. 由题设得 $|MO|=2$，$|OF|=1$，$|MF|=\sqrt{5}$，代入得 $|AF|=5$.

解法 3 设 BF 与 y 轴交于点 M，又因为 $x_B=-x_F$，所以 M 为 BF 中点. 由抛物线的定义得 $|AF|=|AB|$，所以 $AM\perp BF$ 且 $\angle AFM=\angle ABM=\angle MFO$，从而 $\triangle AMF\backsim\triangle MOF$，所以 $\dfrac{AF}{MF}=\dfrac{MF}{OF}$. 由题设得 $|MO|=2$，$|OF|=1$，$|MF|=\sqrt{5}$，代入得 $|AF|=5$.



7. B **解法 1(基本量法)** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\begin{cases}S_3=3a_1+3d=6,\\S_5=5a_1+10d=-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=5,\\d=-3,\end{cases}$ 所以 $S_6=6a_1+\dfrac{6\times 5}{2}d=-15$.

解法 2(性质法) 因为 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，所以 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列. 设 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 d_1，则 $\dfrac{S_5}{5}-\dfrac{S_3}{3}=2d_1$，解得 $d_1=-\dfrac{3}{2}$，所以 $\dfrac{S_6}{6}=\dfrac{S_5}{5}+d_1=-1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{5}{2}$，即 $S_6=-15$.

解后反思 本题的两种解法都很常规，都需要掌握，解法 2 更优.

8. D **解法 1** 因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$. 又因为 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=-\dfrac{3}{5}$，所以 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

解法 2 因为 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=-\dfrac{3}{5}$. 又 $0<\alpha<\pi$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，则 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

解后反思 本题的两种解法的区别在于如何求 $\sin\alpha$，运算量没有太大区别.

9. AD 由题意得，$S_3=a_1+a_2+a_3=\dfrac{a_3}{q^2}+\dfrac{a_3}{q}+a_3=\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{q}+1=7$，即 $\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{q}-6=0$，即 $\left(\dfrac{1}{q}+3\right)\left(\dfrac{1}{q}-2\right)=0$. 又 $q>0$，解得 $\dfrac{1}{q}=2$，即 $q=\dfrac{1}{2}$，故 A 正确；$a_5=a_3q^2=\dfrac{1}{4}$，故 B 错误；由 $a_1=\dfrac{a_3}{q^2}=4$，得 $a_n=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$，$S_n=\dfrac{4\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=8-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$，

$S_5=8-\left(\frac{1}{2}\right)^2\neq 8$,故 C 错误;$a_n+S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}+8-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=8$,故 D 正确.

10. ABD　因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$,故 A 正确;当 $x<0$ 时,$-x>0$,则 $f(-x)=[(-x)^2-3]e^{-x}+2=(x^2-3)e^{-x}+2$,所以 $f(x)=-f(-x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$,故 B 正确;$f(-1)=2e-2=2(e-1)>2$,故 C 错误;当 $x>0$ 时,$f(x)=(x^2-3)e^x+2$,$f'(x)=(x+3)(x-1)e^x$,令 $f'(x)=0$,得 $x=1$,当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点,由于 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,故 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点,故 D 正确.

易错警示 在 $x=0$ 处有意义的奇函数,$f(0)=0$,对它的求解,不能由 $x>0$ 或 $x<0$ 的解析式来求解.

11. ACD　**审题指导** **解决本题的关键所在是如何翻译"以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 M,N",由于双曲线图形及其渐近线的对称性,不妨求出点 M,N 的坐标,发现"MA_1NA_2 是平行四边形且 MA_2 和 NA_1 垂直于 x 轴",再结合图象进行求解.**

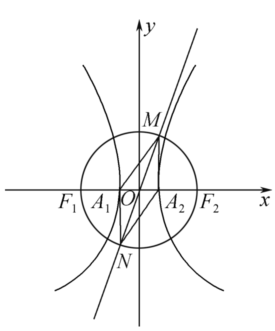
如图,不妨设渐近线的方程为 $y=\frac{b}{a}x$,点 M 在第一象限,点 N 在第三象限. 对于 A,由双曲线的对称性可得 NA_1MA_2 为平行四边形,故 $\angle A_1MA_2=\pi-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,故 A 正确;对于 B,

审题指导 **判断 $|MA_1|$,$|MA_2|$ 的关系,本质就是确定点 M 的坐标.**

因为点 M 在以 F_1F_2 为直径的圆上,所以 $|MO|=c$,设 $M(x_0,y_0)$,则 $\begin{cases}x_0^2+y_0^2=c^2,\\ \frac{y_0}{x_0}=\frac{b}{a},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=a,\\ y_0=b,\end{cases}$ 即 $M(a,b)$,又 $A_2(a,0)$,所以 $MA_2\perp A_1A_2$,由 A 得 $\angle A_1MA_2=\frac{\pi}{6}$,故 $|MA_2|=|MA_1|\cos\angle A_1MA_2=\frac{\sqrt{3}}{2}|MA_1|$,即 $|MA_1|=\frac{2\sqrt{3}}{3}|MA_2|$,故 B 错误;对于 C,

解法 1　$\tan\angle A_1MA_2=\frac{2a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $\frac{b}{a}=2\sqrt{3}$,所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{13}$,故 C 正确;

解法 2　因为 $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2})$,所以 $4\overrightarrow{MO}^2=\overrightarrow{MA_1}^2+2\overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_2}^2$,由 B 可知 $|MA_2|=b$,$|MA_1|=\frac{2\sqrt{3}}{3}b$,故 $4c^2=b^2+\frac{4}{3}b^2+2\times b\times\frac{2\sqrt{3}}{3}b\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{13}{3}b^2=\frac{13}{3}(c^2-a^2)$,即 $c^2=13a^2$,所以离心率 $e=\sqrt{13}$,故 C 正确;对于 D,当 $a=\sqrt{2}$ 时,$b=2\sqrt{6}$,$S_{\text{四边形}NA_1MA_2}=2\times\frac{1}{2}|A_1A_2|\cdot|MA_2|=2ab=8\sqrt{3}$,故 D 正确.



12. $\sqrt{2}$　因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,1-2x)$,$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,即 $x+1-2x=0$,解得 $x=1$,从而 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$.

13. -4　因为 $f'(x)=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)$,若 $x=2$ 为 $f(x)$ 的极值点,则 $f'(2)=2-a=0$,即 $a=2$,所以 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$,则 $f(0)=-1\times4=-4$.

解后反思 对于三次函数而言,函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 有极值点 2,则 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)=0$ 有两个相等的实数根 2,故 $a=2$. 这样求解更能凸显极值点定义的本质.

14. $\frac{5}{2}$　**审题指导** **寻找铁球的半径所满足的关系是解决问题的关键所在,如何寻找?核心在于两个球相切,球心距等于半径之和.**

解法 1　设铁球半径为 r,$0<r<4$,两铁球位置如图 1 所示,对于竖直方向,$O_1H_1+O_1O_2\cdot\sin\theta+O_2H_2=9$,即 $2r+2r\sin\theta=9$,对于水平方向,$A_1O_1+O_1O_2\cdot\cos\theta+A_2O_2=8$,即 $2r+2r\cos\theta=8$,则 $(9-2r)^2+(8-2r)^2=4r^2$,化简得 $4r^2-68r+145=0$,即 $(2r-29)(2r-5)=0$,解得 $r=\frac{5}{2}$ 或 $r=\frac{29}{2}$(舍去).

解法 2　由于两球半径相等,故两圆的切点显然是圆柱的中心,作出轴截面如图 2 所示. 设铁球半径为 r,$0<r<4$,则有 $(4-r)^2+\left(\frac{9}{2}-r\right)^2=r^2$,解得 $r=\frac{5}{2}$ 或 $r=\frac{29}{2}$(舍去),所以铁球半径的最大值为 $\frac{5}{2}$.

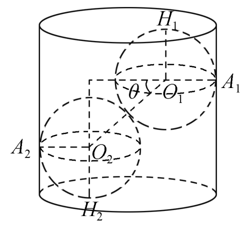


图 1

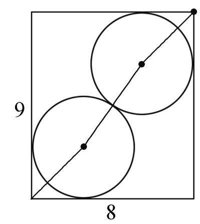


图 2

解后反思 空间问题平面化是处理立体几何问题的基本方法. 本题解法 2 充分运用几何图形的对称性来解题,简单直接灵动,属于优解,解法 1 为通法.

15. **解**:(1) 由题意得 $f(0)=\cos\varphi=\frac{1}{2}$. 因为 $0\leqslant\varphi<\pi$,[1] 所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由(1)可得 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,所以 $g(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 因为 $x\in\mathbf{R}$,[2] 所以当 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ 时,$g(x)_{\max}=\sqrt{3}$,当 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ 时,$g(x)_{\min}=-\sqrt{3}$,所以 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$. 由 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\pi+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$,同理可得,$g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{11\pi}{12}+k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.[3]

规范书写【1】需要交代 φ 的取值范围后求角,否则扣 1 分.

【2】不交代 $x\in\mathbf{R}$,直接写值域,扣 1 分.

【3】单调区间写成开闭区间皆可,不写 $k\in\mathbf{Z}$,扣 1 分.

16. 解:(1) 由 $\begin{cases}2a=4,\\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=2,\\ c=\sqrt{2},\end{cases}$ 则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$,所以椭圆 C:$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2) 显然直线 l 的斜率存在,【1】故可设 l:$y=kx-2$,点 $P(0,-2)$,点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\\ y=kx-2,\end{cases}$ 消去 y,可得 $(2k^2+1)x^2-8kx+4=0$,$\Delta=32k^2-16>0$,【2】解得 $k^2>\dfrac{1}{2}$,则 $x_1+x_2=\dfrac{8k}{2k^2+1}$,$x_1x_2=\dfrac{4}{2k^2+1}>0$(两根同号).

【启发式分析】$S_{\triangle OAB}$ 的常见表示形式有两种,即 $S_{\triangle OAB}=|S_{\triangle OPB}-S_{\triangle OPA}|=\dfrac{1}{2}\times2|x_2-x_1|$,和 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d$($d$ 表示点 O 到直线 AB 的距离).

解法 1 $S_{\triangle OAB}=|S_{\triangle OAP}-S_{\triangle OBP}|=\left|\dfrac{1}{2}|OP|\cdot x_1-\dfrac{1}{2}|OP|\cdot x_2\right|=|x_1-x_2|=\sqrt{2}$,则 $2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(\dfrac{8k}{2k^2+1}\right)^2-\dfrac{16}{2k^2+1}=\dfrac{16(2k^2-1)}{(2k^2+1)^2}$,解得 $k^2=\dfrac{3}{2}$(显然满足 $\Delta>0$),【3】则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+\dfrac{3}{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{5}$.

解法 2 因为点 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}$,$|AB|=\sqrt{k^2+1}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{k^2+1}\cdot\dfrac{\sqrt{32k^2-16}}{2k^2+1}$,所以 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\sqrt{k^2+1}\cdot\dfrac{\sqrt{32k^2-16}}{2k^2+1}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{32k^2-16}}{2k^2+1}=\sqrt{2}$,解得 $k^2=\dfrac{3}{2}$(显然满足 $\Delta>0$),【4】则 $|AB|=\sqrt{k^2+1}\cdot\dfrac{\sqrt{32k^2-16}}{2k^2+1}=\sqrt{1+\dfrac{3}{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{5}$.

解法 3 由题意可设 l:$x=m(y+2)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,取 Q 为 l 与 x 轴交点,坐标为$(2m,0)$,则$\triangle OAB$ 的面积为 $S_{\triangle AOQ}+S_{\triangle BOQ}=\dfrac{1}{2}\times|2m||y_1-y_2|=|m||y_1-y_2|$. 由题设知 $|m||y_1-y_2|=\sqrt{2}$. 由 $\begin{cases}x=m(y+2),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+4m^2y+4m^2-4=0$. 则 $y_1+y_2=\dfrac{-4m^2}{2+m^2}$,$y_1y_2=\dfrac{4m^2-4}{2+m^2}$. $(y_1-y_2)^2=\dfrac{-16(m^2-2)}{(2+m^2)}$. 所以 $\dfrac{-16(m^2-2)m^2}{(2+m^2)^2}=2$,解得 $m^2=\dfrac{2}{3}$. 因此 $|AB|=\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{|m|}\times|m||y_1-y_2|=\sqrt{5}$.

规范书写【1】不交代 l 的斜率存在,直接设直线方程,扣 1 分.

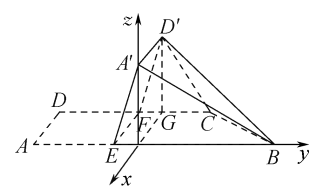
【2】不写出判别式的表达式,即 $\Delta=32k^2-16$,扣 1 分.

【3】【4】求出 $k^2=\dfrac{3}{2}$ 后,不交代满足 $\Delta>0$,扣 1 分.

解后反思 显然解法 1 和 2 都是常用解法,对于本题而言,解法 1 更简洁. 解法 1 的本质是将一个三角形的面积转化为两个更为易求的三角形的面积之和或差的形式来加以解决. 当然,本题也可将 $S_{\triangle OAB}$ 转化为 $\dfrac{1}{2}|OQ||y_1-y_2|$(其中 Q 为直线 AB 与 x 轴的交点)来求解,不过,此时由直线方程与椭圆方程联立成方程组,消去 x 更好.

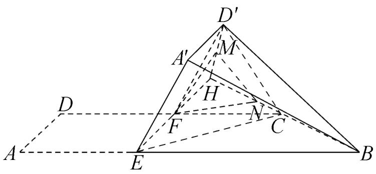
17. (1) **证明:**因为 $EB/\!/FC$,$FC\subset$平面 FCD',$EB\not\subset$平面 FCD',【1】所以 $EB/\!/$平面 $CD'F$. 又因为 $A'E/\!/D'F$,$D'F\subset$平面 FCD',$A'E\not\subset$平面 FCD',【2】所以 $A'E/\!/$平面 $CD'F$. 又因为 $A'E\cap EB=E$,$A'E$,$EB\subset$平面 $A'EB$,所以平面 $A'EB/\!/$平面 $CD'F$. 又 $A'B\subset$平面 $A'EB$,所以 $A'B/\!/$平面 $CD'F$.

(2) **解法 1** 由 $EF\perp A'E$ 且 $EF\perp EB$,平面 $EFD'A'\cap$平面 $EFCB=EF$,可知$\angle A'EB$ 即为平面 $EFD'A'$与平面 $EFCB$ 所成二面角的平面角,所以$\angle A'EB=60°$. 又 $A'E\cap EB=E$,$A'E$,$EB\subset$平面 $A'EB$,所以 $EF\perp$平面 $A'EB$. 不妨设 $AD=1$,则 $CD=2$,$AB=3$,易得 $DF=AE=1$. 在平面 $A'EB$ 内,过点 A' 作 EB 的垂线,垂足为 O,则 $EO=\dfrac{1}{2}$,$A'O=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$OB=\dfrac{3}{2}$. 过点 O 作 $OG/\!/EF$,交 CD 于点 G,则 $OG\perp$平面 $A'EB$,又 OA',$OB\subset$平面 $A'EB$,所以 $OG\perp OA'$,$OG\perp OB$,所以 OG,OB,OA'两两垂直. 以 O 为原点,OG,OB,OA'所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 O-xyz.【3】



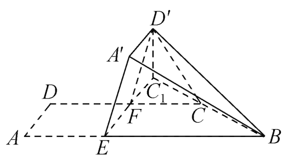
则 $E\left(0,-\dfrac{1}{2},0\right)$,$F\left(-1,-\dfrac{1}{2},0\right)$,$A'\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$D'\left(-1,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$B\left(0,\dfrac{3}{2},0\right)$,$C\left(-1,\dfrac{1}{2},0\right)$. $\overrightarrow{FE}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{EA'}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{FE}\cdot\boldsymbol{n}_1=x_1=0,\\ \overrightarrow{EA'}\cdot\boldsymbol{n}_1=\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$ 取 $y_1=-\sqrt{3}$,则 $z_1=1$,可得 $\boldsymbol{n}_1=(0,-\sqrt{3},1)$. $\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{D'B}=\left(1,\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 设平面 BCD'的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}_2=x_2+y_2=0,\\ \overrightarrow{D'B}\cdot\boldsymbol{n}_2=x_2+\dfrac{3}{2}y_2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2=0,\end{cases}$ 取 $y_2=\sqrt{3}$,则 $x_2=-\sqrt{3}$,$z_2=1$,可得$\boldsymbol{n}_2=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$. 设平面 BCD'与平面 $EFD'A'$所成角为 θ,则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$,故 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. 故平面 BCD'与平面 $EFD'A'$所成二面角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

解法 2(综合法) 如图,延长 EF 与 BC 交于点 H,连结 HD',不妨设 $AD=1$ 易得 $A'D'=D'F=EF=A'E=FC=\dfrac{1}{2}EB=1$,$BC=\sqrt{2}$ 且$\angle EBC=\dfrac{\pi}{4}$,所以在$\triangle HEB$ 中,$CH=\sqrt{2}$ 且 $FH=1=FD'$,又由 $D'F\perp EF$,所以 $HD'=\sqrt{2}$,取 HD' 的中点 M,故 $FM\perp HD'$,且 $FM=\dfrac{1}{2}D'H=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 作 $MN\perp HD'$交 HC 于点 N,则$\angle FMN$ 为平面 BCD'与平面 $EFD'A'$所成的二面角的平面角.



因为 $CF\perp EF$，$D'F\perp EF$，所以 $\angle D'FC$ 为平面 $EFD'A$，与平面 $EFCB$ 所成二面角的平面角，所以 $\angle D'FC=\frac{\pi}{3}$. 又因为 $D'F=FC=1$，所以 $D'C=1$. 又因为 $CH=D'H=\sqrt{2}$，所以在 $\triangle D'HC$ 中，由余弦定理有 $\cos\angle D'HC=\frac{2+2-1}{2\times2}=\frac{3}{4}$，故在 $\mathrm{Rt}\triangle HMN$ 中，$MN=MH\cdot\tan\angle D'HC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{\sqrt{14}}{6}$，$HN=\sqrt{\frac{7}{18}+\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 易知 $\angle EHB=\frac{\pi}{4}$，所以在 $\triangle FHN$ 中，由余弦定理有 $FN^2=1+\frac{8}{9}-2\times1\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{9}$. 所以在 $\triangle FMN$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle FMN=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{7}{18}-\frac{5}{9}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{6}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$，故平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成的二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

解法 3 如图，延长 EF 交 BC 的延长线于点 C_1，连接 $D'C_1$.



因为平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成的二面角为 60°，平面 $EFD'A'\cap$ 平面 $EFCB=EF$，$EF\perp D'F$，$EF\perp CF$，所以 $\angle D'FC=60^\circ$. 设 $DF=FC=1$，则 $EF=1$，$BE=2$，所以 $FC_1=1$. 因为 $D'F\perp FC_1$，$FC\perp FC_1$，$D'F\cap FC=F$，$D'F,FC\subset$ 平面 $CD'F$，所以 $FC_1\perp$ 平面 $CD'F$. 所以 $V_{三棱锥C_1-CD'F}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{12}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1FD'$ 中，$D'C_1=\sqrt{D'F^2+FC_1^2}=\sqrt{2}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CFC_1$ 中，$C_1C=\sqrt{FC_1^2+FC^2}=\sqrt{2}$. 由 $D'F=FC$，$\angle D'FC=60^\circ$，得 $\triangle D'FC$ 为等边三角形，所以 $D'C=1$. 在 $\triangle D'CC_1$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle CD'C_1=\frac{1+2-2}{2\times1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $\sin\angle CD'C_1=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$，所以 $S_{\triangle D'CC_1}=\frac{1}{2}D'C_1\cdot D'C\cdot\sin\angle CD'C_1=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1\times\frac{\sqrt{14}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. 设点 F 到平面 $D'CC_1$ 的距离为 h，$V_{三棱锥C_1-CD'F}=V_{三棱锥F-D'CC_1}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{3}S_{\triangle D'C_1C}\cdot h$，则 $h=\frac{\sqrt{21}}{7}$. 设点 F 到 $D'C_1$ 的距离为 d，则 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 设平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成角的平面角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{h}{d}=\frac{\sqrt{42}}{7}$. 故平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

规范书写 【1】【2】不交代 $EB\not\subset$ 平面 $CD'F$，$A'E\not\subset$ 平面 $CD'F$，扣 1 分.

【3】不交代 OG，OB，OA' 两两垂直，直接建系，扣 1 分.

解后反思 一般地，解决立体几何问题有三种方法：基底法、坐标法和综合法. 解法 1 采用坐标法，只需确定空间直角坐标系即可，解法 2 采用综合法，对空间想象能力和思维能力有较高的要求，两种方法都需要掌握. 在平时的训练中，特别要强化练习综合法.

18. (1) **审题指导** **“函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一极值点”等价于“$f'(x)=0$ 有唯一解，且在解的两侧 $f'(x)$ 的值互异”；而函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在零点，只需应用函数零点存在定理即可.**

证明： 由题得 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-3kx^2=\frac{1-1-x+x+x^2-3kx^2-3kx^3}{1+x}=\frac{-3kx^2}{1+x}\left(x+1-\frac{1}{3k}\right)$. 当 $x>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{3k}-1>0$，所以当 $0<x<\frac{1}{3k}-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>\frac{1}{3k}-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. 所以 $x=\frac{1}{3k}-1$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上唯一的极值点，是极大值点.

证法 1 对于函数 $y=\ln(1+x)-x$，$y'=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $y=\ln(1+x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $y=\ln(1+x)-x<y\Big|_{x=0}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 当 $x\to+\infty$ 时，$y=\frac{1}{2}x^2-kx^3=\frac{1}{2}x^2(1-2kx)<0$，所以当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)<0$. 又因为 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{3k}-1\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{3k}-1,+\infty\right)$ 上单调递减，且 $f(0)=0$，所以 $f\left(\frac{1}{3k}-1\right)>f(0)=0$，所以存在唯一的 $x_3\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_3)=0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点.

证法 2 因为 $f\left(\frac{1}{3k}-1\right)>f(0)=0$，$f\left(\frac{1}{2k}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2k}<0$（由证法 1 的分析过程可得），所以存在唯一的 $x_3\in\left(\frac{1}{3k}-1,\frac{1}{2k}\right)$，使得 $f(x_3)=0$.

(2) ①**证明：** 由(1)知 $x_1=\frac{1}{3k}-1$，$x_2=x_3$，则 $g'(t)=f'(x_1+t)+f'(x_1-t)=(x_1+t)^2\left(\frac{1}{x_1+t+1}-3k\right)+(x_1-t)^2\left(\frac{1}{x_1-t+1}-3k\right)=(x_1+t)^2\left(\frac{1}{x_1+t+1}-\frac{1}{x_1+1}\right)+(x_1-t)^2\left(\frac{1}{x_1-t+1}-\frac{1}{x_1+1}\right)=\frac{-t(x_1+t)^2}{(x_1+t+1)(x_1+1)}+\frac{t(x_1-t)^2}{(x_1-t+1)(x_1+1)}=\frac{t}{x_1+1}\left[\frac{(x_1-t)^2}{x_1-t+1}-\frac{(x_1+t)^2}{x_1+t+1}\right]=\frac{t}{x_1+1}\cdot\frac{(x_1-t)^2(x_1+t+1)-(x_1+t)^2(x_1-t+1)}{(x_1-t+1)(x_1+t+1)}=\frac{t}{x_1+1}\cdot\frac{-2t(x_1^2-t^2)-4tx_1}{(x_1-t+1)(x_1+t+1)}=\frac{2t^2(t^2-x_1^2-2x_1)}{(x_1+1)(x_1-t+1)(x_1+t+1)}<0$，故 $g(t)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减.

②**【启发式分析】** 注意到所要比较的两个值为自变量的值，为此，将它们转化为函数值的大小来加以解决. 一方面，注意到 $2x_1$，x_2 在函数 $f(x)$ 的单调递减区间内；另一方面，注意到 $f(x_2)=0$，为此，只需判断 $f(2x_1)$ 的符号即可.

解： $2x_1>x_2$，证明如下：

证法 1（利用①构造 $f(2x_1)$） 由①知 $g(t)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，则

$g(x_1)<g(0)=0$,即 $f(2x_1)-f(0)<f(x_1+0)-f(x_1-0)=0$,所以 $f(2x_1)-f(0)<0$.因为 x_2 是 $f(x)$的零点,所以 $f(x_2)=0$,所以 $f(2x_1)<f(x_2)$.又因为 $x_2>x_1$,$2x_1>x_1$,且 $f(x)$在$(x_1,+\infty)$上单调递减,所以 $2x_1>x_2$.

证法 2(直接法) $f(2x_1)=f\left(\frac{2}{3k}-2\right)=\ln\left(\frac{2}{3k}-1\right)+8k+\frac{2}{3k}-\frac{2}{27k^2}-4$.令 $F(k)=\ln\left(\frac{2}{3k}-1\right)+8k+\frac{2}{3k}-\frac{2}{27k^2}-4\left(0<k<\frac{1}{3}\right)$,则 $F'(k)=\frac{1}{\frac{2}{3k}-1}\cdot\left(-\frac{2}{3k^2}\right)+8-\frac{2}{3k^2}+\frac{4}{27k^3}=\frac{8(1+3k)(1-3k)^3}{27k^3(2-3k)}$.因为 $0<k<\frac{1}{3}$,所以 $F'(k)>0$,故函数 $F(k)$在$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上单调递增,从而 $F(k)<F\left(\frac{1}{3}\right)=0$,即 $f(2x_1)<0=f(x_2)$.又因为 $x_2>x_1$,$2x_1>x_1$,且 $f(x)$在$(x_1,+\infty)$上单调递减,所以 $2x_1>x_2$.

解后反思 本题的第(1)问是常规题,第(2)①问的难点在于计算,尤其是导数的求解,而第(2)②问则考查学生的思维能力、等价转化能力以及构造能力.

19. (1) **解法 1** p_3 表示打完 3 个球之后,甲比乙至少多得 2 分的概率,此时只能是甲得 3 分乙得 0 分,所以 $p_3=p^3$.p_4 表示打完 4 个球之后,甲比乙至少多得 2 分的概率,即甲得 4 分乙得 0 分,或者甲得 3 分乙得 1 分,所以 $p_4=C_4^3p^3q+p^4=4p^3q+p^4=4p^3(1-p)+p^4=4p^3-3p^4$.

解法 2 不妨设 X_n 表示 n 局以后甲的得分,那么乙的得分即为 $n-X_n$(每个球总得有人得分,不是甲就是乙),则 $X_n\sim B(n,p)$.若甲比乙至少多得 2 分,则 $p_k=P(X_k-(k-X_k)\geqslant 2)=P(2X_k-k\geqslant 2)=P\left(X_k\geqslant 1+\frac{k}{2}\right)$,从而 $p_3=P\left(X_3\geqslant\frac{5}{2}\right)=P(X_3=3)=p^3$,$p_4=P(X_4\geqslant 3)=P(X_4=3)+P(X_4=4)=C_4^3p^3(1-p)+C_4^4p^4=(4-3p)p^3$.

(2) **解**:根据对称性,以及(1)的结果,可得 $q_3=q^3$,$q_4=4q^3-3q^4$.因此,$\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=\frac{4p^3-3p^4-p^3}{4q^3-3q^4-q^3}=\frac{3p^3(1-p)}{3q^3(1-q)}=\frac{p^3q}{q^3p}=\frac{p^2}{q^2}=4$,解得$\frac{p}{q}=2$.又 $p+q=1$,所以 $p=\frac{2}{3}$.

(3)**【启发式分析】**先确定当甲比乙至少多得两分时,甲获胜的次数需要满足的条件.设在 k 个球的练习中,甲胜 x 个球,则乙胜$(k-x)$个球,当甲比乙至少多得 2 分时,$x-(k-x)\geqslant 2$,即 $x\geqslant\frac{k+2}{2}$.接下来考虑当 $k=2m+1$ 与 $k=2m$ 时,甲获胜的次数是多少.$k=2m+1$ 的情况可以基于 $k=2m$ 得到,然后研究 $k=2m+2$ 与 $k=2m$ 时的情况即可.

证法 1 先证 $p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}$.由(1)中解法 2 可得 $p_{2m+1}=P\left(X_{2m+1}\geqslant 1+\frac{2m+1}{2}\right)=P(X_{2m+1}\geqslant m+2)$.

【启发式分析】首先考察前 $2m$ 个球甲的得分情况.如果前面已经有 $X_{2m}\geqslant m+2$,那么一定会有 $P(X_{2m+1}\geqslant m+2)$;如果 $X_{2m}=m+1$,那么最后一个球甲必须得分;而如果 $X_{2m}<m+1$,那么甲无论如何也无法比乙多得 2 分.

因此,$p_{2m+1}=P(X_{2m+1}\geqslant m+2\mid X_{2m}\geqslant m+2)P(X_{2m}\geqslant m+2)+P(X_{2m+1}\geqslant m+2\mid X_{2m}=m+1)P(X_{2m}=m+1)=P(X_{2m}\geqslant m+2)+P(X_{2m}=m+1)p=P(X_{2m}\geqslant m+2)+P(X_{2m}=m+1)-P(X_{2m}=m+1)q=P(X_{2m}\geqslant m+1)-P(X_{2m}=m+1)q=p_{2m}-C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m$,同理,$q_{2m+1}=q_{2m}-C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m$.因为 $0<q<\frac{1}{2}<p<1$,所以 $p_{2m+1}-q_{2m+1}=p_{2m}-q_{2m}+C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m-C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m=p_{2m}-q_{2m}+C_{2m}^{m+1}(pq)^m(q-p)<p_{2m}-q_{2m}$.再证 $p_{2m+2}-q_{2m+2}>p_{2m}-q_{2m}$.由上可得 $p_{2m+2}=P\left(X_{2m+2}\geqslant 1+\frac{2m+2}{2}\right)=P(X_{2m+2}\geqslant m+2)$.

【启发式分析】此时要求 $X_{2m+2}\geqslant m+2$,首先考察前 $2m$ 个球甲的得分情况.当已经有 $X_{2m}\geqslant m+2$ 时,无论如何都会有 $X_{2m+2}\geqslant m+2$;当 $X_{2m}=m+1$ 时,只要不连续输两球即可;当 $X_{2m}=m$ 时,最后两球必须连胜;当 $X_{2m}<m$ 时,则甲不可能比乙多得 2 分.

因此,$p_{2m+2}=P(X_{2m+2}\geqslant m+2)=P(X_{2m}\geqslant m+2)+P(X_{2m}=m)p^2+P(X_{2m}=m+1)[1-(1-p)^2]=P(X_{2m}\geqslant m+2)+P(X_{2m}=m)+P(X_{2m}=m+1)+(p^2-1)P(X_{2m}=m)-(1-p)^2P(X_{2m}=m+1)=P(X_{2m}\geqslant m)+(p^2-1)C_{2m}^mp^mq^m-C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m+1}=p_{2m}+(p^2-1)C_{2m}^mp^mq^m-C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m+1}$.同理,$q_{2m+2}=q_{2m}+(q^2-1)C_{2m}^mp^mq^m-C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m+1}$.因为 $1>p>\frac{1}{2}>q>0$,所以 $p_{2m+2}-q_{2m+2}=p_{2m}-q_{2m}+(p^2-q^2)C_{2m}^mp^mq^m>p_{2m}-q_{2m}$.

综上所述,对任意正整数 m,$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.

证法 2 记 $a_m(x)$表示打完 m 球后甲得 x 分的概率,则 $p_{2m+1}=p_{2m}-q\cdot a_{2m}(m+1)$,$q_{2m+1}=q_{2m}-p\cdot a_{2m}(m-1)$,故 $p_{2m+1}-p_{2m}=-q\cdot a_{2m}(m+1)$,$q_{2m+1}-q_{2m}=-p\cdot a_{2m}(m-1)$,故要证 $p_{2m+1}-p_{2m}<q_{2m+1}-q_{2m}$,只需证 $p\cdot a_{2m}(m-1)<q\cdot a_{2m}(m+1)$,即证 $p\cdot p^{m-1}\cdot q^{m+1}\cdot C_{2m}^{m-1}<q\cdot p^{m+1}\cdot q^{m-1}\cdot C_{2m}^{m+1}$,即证 $p^mq^{m+1}<q^mp^{m+1}$,即 $q<p$.由条件 $q=1-p<\frac{1}{2}<p$,知结论成立.

由上可知,$p_{2m+2}=p_{2m+1}+p\cdot a_{2m+1}(m+1)=p_{2m}+p\cdot a_{2m+1}(m+1)-qa_{2m}(m+1)$,$q_{2m+2}=q_{2m+1}+q\cdot a_{2m+1}(m)=q_{2m}+q\cdot a_{2m+1}(m)-pa_{2m}(m-1)$,要证 $p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$,只需证 $p\cdot a_{2m+1}(m+1)-qa_{2m}(m+1)>qa_{2m+1}(m)-p\cdot a_{2m}(m-1)$,只需证 $p^{m+2}q^mC_{2m+1}^{m+1}-p^{m+1}q^mC_{2m}^{m+1}>q^{m+2}p^mC_{2m+1}^m-q^{m+1}p^mC_{2m}^{m-1}$,只需证 $p^2C_{2m+1}^{m+1}-pC_{2m}^{m+1}>q^2C_{2m+1}^{m+1}-qC_{2m}^{m+1}$,只需证$(p-q)(p+q)C_{2m+1}^{m+1}>(p-q)C_{2m}^{m+1}$,即证$C_{2m+1}^{m+1}>C_{2m}^{m+1}$.因为 $C_{2m+1}^{m+1}=C_{2m}^{m+1}+C_{2m}^m$,且 $C_{2m}^m>0$,所以 $C_{2m+1}^{m+1}>C_{2m}^{m+1}$ 成立.故原不等式成立.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅰ

1. A 由题意,$A=\{x\mid -\sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{5}\}$,则 $A\cap B=\{-1,0\}$.

2. C $z=(z-1)(1+\mathrm{i})=(1+\mathrm{i})z-1-\mathrm{i}$,故 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$.

3. D $\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}=(2,x-4)$,由 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$,可得 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})=(2,x)\cdot(2,x-4)=0$,即 $4+x^2-4x=0$,解得 $x=2$.

4. A 由$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m,\\ \tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=2,\end{cases}$得 $\begin{cases}\sin\alpha\sin\beta=-2m,\\ \cos\alpha\cos\beta=-m,\end{cases}$则 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-3m$.

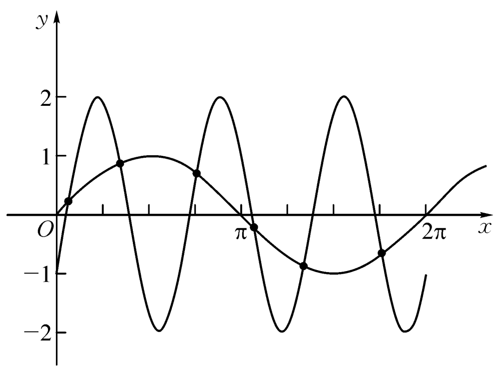
5. B 设圆锥的底面半径为 r,母线长为 l.由侧面积相等可得 $\pi rl=2\pi r\cdot\sqrt{3}$,所以 $l=2\sqrt{3}$,则 $r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$,所以圆锥的体

积为$\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi$.

6. B　当$x\geqslant 0$时,由$y_1=e^x$,$y_2=\ln(x+1)$均单调递增,可知$f(x)$单调递增,则要使得$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,必有$\begin{cases}-a\geqslant 0,\\-a\leqslant e^0+\ln 1,\end{cases}$解得$-1\leqslant a\leqslant 0$.

易错警示　分段函数单调递增,则需要各段都单调递增,还要考虑"接点"处函数值的大小关系,即接点处左端函数值小于或等于右端函数值.

7. C　作出函数$y=\sin x$与$y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象,可知在$[0,2\pi]$上有6个交点.



解后反思　解决本题的关键在于作图,需要能通过五点作图法作出函数$y=\sin x$与$y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

8. B　$f(1)=1$,$f(2)=2$,$f(3)>f(2)+f(1)=3$,则$f(4)>f(3)+f(2)>5$,$f(5)=f(4)+f(3)>8$,$f(6)>13$,$f(7)>21$,$f(8)>34$,$f(9)>55$,$f(10)>89$,$f(11)>144$,$f(12)>233$,$f(13)>377$,$f(14)>233+377=610$,$f(15)>377+610=987$,$f(16)>610+987>1000$,可知$f(20)>1000$,故A错误,B正确;而C,D条件不足,无法判断.

解后反思　本题解题在于弄懂题意,通过逐项相加法以及不等式的性质,求出$f(10)$,$f(20)$所满足的不等关系.

9. BC　由题意,$X\sim N(1.8,0.1^2)$,$Y\sim N(2.1,0.1^2)$,而$2=1.8+2\times 0.1=\mu+2\sigma$,所以$P(X>2)=P(X>\mu+2\sigma)<P(X>\mu+\sigma)\approx 1-0.8413=0.1587$,所以A错误;$P(X>2)<P(X>1.8)=P(X>\mu)=0.5$,所以B正确;$P(Y>2)>P(Y>2.1)=P(Y>\mu)=0.5$,所以C正确;$P(Y>2)=P(Y>2.1-0.1)=P(Y>\mu-\sigma)=P(Y<\mu+\sigma)\approx 0.8413>0.8$,所以D错误.

10. ACD　因为$f'(x)=3(x-1)(x-3)$,所以函数$f(x)$在区间$(-\infty,1)$上单调递增,在区间$(1,3)$上单调递减,在区间$(3,+\infty)$上单调递增.对于选项A,函数$f(x)$的极小值点为3,故A正确;对于选项B,当$0<x<1$时,$0<x^2<x<1$,而函数$f(x)$在区间$(-\infty,1)$上单调递增,所以$f(x^2)<f(x)$,故B错误;对于选项C,

解法1　当$1<x<2$时,$1<2x-1<3$,而函数$f(x)$在区间$(1,3)$上单调递减,所以$f(3)<f(2x-1)<f(1)$,即$-4<f(2x-1)<0$,故C正确;

解法2　令函数$g(x)=f(2x-1)$,则$g(x)$的图象可由$f(x)$图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$,纵坐标不变,再把得到的曲线向右平移$\frac{1}{2}$个单位长度得到,故$g(x)$在区间$(1,2)$上单调递减,又$g(1)=0$,$g(2)=-4$,所以$-4<f(2x-1)<0$,故C正确;对于选项D,

解法1　当$-1<x<0$时,$2<2-x<3$,而函数$f(x)$在区间$(-\infty,1)$上单调递增,在区间$(1,3)$上单调递减,所以$f(x)<f(0)=-4=f(3)<f(2-x)$,故D正确.

解法2　函数$f(2-x)$的图象和函数$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称,由$f(x)$在区间$(-1,0)$上单调递增,且在区间$(2,3)$上单调递减知,当$-1<x<0$时,$f(x)<-4$,$-4<f(2-x)$,故$f(2-x)>f(x)$,故D正确.

解后反思　本题选项D,也可以用作差法进行判断,即$f(2-x)-f(x)=-2(x-1)^3$.又$-1<x<0$,所以$f(2-x)-f(x)=-2(x-1)^3>0$,即$f(2-x)>f(x)$.选项C和D的解法2从函数图象的角度出发,体现了少算多想的命题指导思想.

11. ABD　设(x,y)为曲线C上任意一点,则$|x-a|\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$,因为$C$过原点,所以$2|a|=4$,又$a<0$,所以$a=-2$,故A正确;所以曲线$C$的方程为$|x+2|\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$,把点$(2\sqrt{2},0)$代入曲线$C$的方程得$|2\sqrt{2}+2|\cdot\sqrt{(2\sqrt{2}-2)^2+0^2}=4$,故B正确;由$|x+2|\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$,得$y^2=\frac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2$,不妨设$f(x)=\frac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2$,$x>0$,则$f'(x)=\frac{-2x(x^3+4x^2-16)}{(x+2)^3}$,$x>0$,令$t(x)=x^3+4x^2-16$,$x>0$,则$t'(x)=3x^2+8x>0$,所以函数$t(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,而$t(1)<0$,$t(2)>0$,所以存在$x_0\in(1,2)$,使得$t(x_0)=0$,所以函数$f(x)$在区间$(0,x_0)$上单调递增,在区间$(x_0,2)$上单调递减,故$f(x_0)>f(2)=1$,故C错误;由$y^2=\frac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2$,得$y^2\leqslant\frac{16}{(x+2)^2}(x>-2)$,即$y_0\leqslant\frac{4}{x_0+2}$,故D正确.

12. $\frac{3}{2}$　**解法1**　由$|AB|=10$,知$|AF_2|=5$,则$2a=|AF_1|-|AF_2|=13-5=8$.在$\mathrm{Rt}\triangle AF_1F_2$中,$2c=|F_1F_2|=\sqrt{|AF_1|^2-|AF_2|^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$,所以$e=\frac{2c}{2a}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$.

解法2　由条件知点A的横坐标为c.由双曲线的对称性知$|F_2A|=5$.由双曲线的定义知,点A到左准线的距离和到左焦点的距离之比等于常数,它也等于点A到右准线的距离和到右焦点的距离之比.因此,$\frac{c+\frac{a^2}{c}}{13}=\frac{c-\frac{a^2}{c}}{5}$.通分并整理得$8c^2=18a^2$,故$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{18}{8}}=\frac{3}{2}$.

解后反思　对双曲线定义较为熟悉的学生可以通过解法1直接得到结果;而熟悉拓展内容准线的学生可以通过解法2直接得到结果.

13. $\ln 2$　**解法1**　因为函数$y=e^x+x$的导数为$y'=e^x+1$,所以曲线$y=e^x+x$在点$(0,1)$处的切线的斜率为$y'\Big|_{x=0}=e^0+1=2$,切线方程为$y=2x+1$.设曲线$y=\ln(x+1)+a$的切点为$(x_0,\ln(x_0+1)+a)$,而函数$y=\ln(x+1)+a$的导数为$y'=\frac{1}{x+1}$,则$\frac{1}{x_0+1}=2$,解得$x_0=-\frac{1}{2}$.由$\ln(x_0+1)+a=2x_0+1$,解得$a=\ln 2$.

解法2　因为函数$y=e^x+x$的导数为$y'=e^x+1$,所以曲线$y=e^x+$

x 在点$(0,1)$处的切线的斜率为 $y'\Big|_{x=0}=e^0+1=2$. 设曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切点为$(x_0,\ln(x_0+1)+a)$，而函数 $y=\ln(x+1)+a$ 的导数为 $y'=\dfrac{1}{x+1}$，则 $\dfrac{1}{x_0+1}=2$，解得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，进而 $\dfrac{\ln\left(-\frac{1}{2}+1\right)+a-1}{-\frac{1}{2}-0}=2$，解得 $a=\ln 2$.

解后反思 本题考查两个函数的公切线问题，解法 1 是根据公切线的斜率和切点纵坐标分别相等联立方程组来求解，解法 2 是借助公式 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=f'(x_0)$($x_0$ 为切点横坐标)来求解，运算量稍小一点.

14. $\dfrac{1}{2}$ 【启发式分析】本题解题的关键不在于抽到卡牌的顺序，而在于号码的对应关系，因此可以固定一方的出卡顺序，不妨固定甲的出卡顺序：1—3—5—7，再将乙抽到的卡牌号进行对应排列即可，所以总共有 $A_4^4=24$ 种情况，把符合题意的情形枚举出来即可，那么如何枚举呢？考虑将最大数字 8 的位置作为解题突破口比较好.

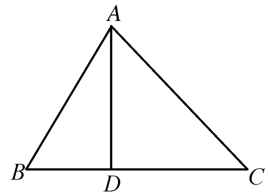
考虑将 8 的出牌顺序作为分类标准. 若 1—8，则只有 3—4，5—6，7—2，不符合题意，故有 $A_3^3-1=5$ 种组合. 若 3—8，则符合题意的有 5—2，7—4，1—6；5—2，7—6，1—4；5—4，7—2，1—6；5—4，7—6，1—2. 有 4 种组合. 若 5—8，则只有 3—2，7—4，1—6 和 3—2，7—6，1—4 符合题意，有 2 种. 若 7—8，则只有 3—2，5—4，1—6 符合题意，有 1 种组合. 总共有 $5+4+2+1=12$ 种组合符合要求，而所有的组合有 $A_4^4=24$ 种，故甲的总得分不小于 2 的概率为$\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2}$.

解后反思 对于离散型数学问题，常用枚举法解题，枚举也需要有序枚举，本题把卡号 8 的位置作为分类的标准，就显得直接易求了.

15. 解：(1) 在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 又因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\dfrac{\pi}{4}$. 由 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$，得 $\cos B=\dfrac{\sin C}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$. 又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)**解法 1** 在$\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}c^2\cdot\dfrac{\sin A\sin B}{\sin C}$，即 $3+\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}c^2\cdot\dfrac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，解得 $c=2\sqrt{2}$.

解法 2 过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D，由(1)知 D 在线段 BC 上. 在 $Rt\triangle ABD$ 中，由 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 得 $BD=\dfrac{c}{2}$，$AD=\dfrac{\sqrt{3}c}{2}$. 在 $Rt\triangle ACD$ 中，由 $C=\dfrac{\pi}{4}$ 得 $CD=AD=\dfrac{\sqrt{3}c}{2}$. 从而 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(1+\sqrt{3})c}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}c}{2}=\dfrac{(3+\sqrt{3})c^2}{8}$. 又 $S_{\triangle ABC}=3+\sqrt{3}$，所以 $c^2=8$，故 $c=2\sqrt{2}$.



16. 解：(1)将点 A，P 的坐标分别代入 C 的方程得$\begin{cases}\dfrac{9}{b^2}=1,\\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1,\end{cases}$解得 $b^2=9$，$a^2=12$，则 $c^2=a^2-b^2=3$，所以 $e=\sqrt{\dfrac{3}{12}}=\dfrac{1}{2}$.

(2)【启发式分析】第(2)问大致有三个思路：一是直接设直线 l 的方程，求解点 B 的坐标，再求点 A 到直线 BP 的距离 d_A，借助 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}|BP|\cdot d_A$ 求解直线 l 的方程；二是设点 B，再求点 B 到直线 AP 的距离 d_B，借助 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}|AP|\cdot d_B$，求出点 B 满足的关系式，再结合点 B 在椭圆上求解点 B 的坐标，进而求出直线 l 的方程；由于点 B 在椭圆上，故可以设点 B 的参数方程，避免曲直联立求点 B 的坐标，这样就产生了第三种方法.

解法 1 当直线 l 的斜率不存在时，$l:x=3$，$B\left(3,-\dfrac{3}{2}\right)$，此时 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}\neq9$，不满足题意. 当直线 l 的斜率存在时，设 $l:y-\dfrac{3}{2}=k(x-3)$，$B(x_0,y_0)$，联立$\begin{cases}y-\dfrac{3}{2}=k(x-3),\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1,\end{cases}$消去 y 得$(4k^2+3)x^2-(24k^2-12k)x+36k^2-36k-27=0$，则 $3x_0=\dfrac{36k^2-36k-27}{4k^2+3}$，即 $x_0=\dfrac{12k^2-12k-9}{4k^2+3}$，$|PB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|\dfrac{12k^2-12k-9}{4k^2+3}-3\right|=\dfrac{\sqrt{1+k^2}\,|12k+18|}{4k^2+3}$，点 A 到直线 PB 的距离 $d_A=\dfrac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}$，则 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}|PB|\cdot d_A$，即 $9=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{1+k^2}\,|12k+18|}{4k^2+3}\cdot\dfrac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left|(12k+18)\left(3k+\frac{3}{2}\right)\right|}{4k^2+3}$，化简整理得 $8k^2+6=|(2k+3)(2k+1)|$，即 $8k^2+6=(2k+3)(2k+1)$ 或 $8k^2+6=-(2k+3)(2k+1)$，所以有$(2k-1)(2k-3)=0$ 或 $12k^2+8k+9=0$(舍)，解得 $k=\dfrac{1}{2}$ 或 $k=\dfrac{3}{2}$，故直线 l 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$ 或 $y=\dfrac{3}{2}x-3$.

解法 2 由(1)知 $C:\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$，$|AP|=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，直线 AP 的方程为 $x+2y-6=0$. 设点 $B(x_0,y_0)$($-2\sqrt{3}\leqslant x_0\leqslant2\sqrt{3}$，$-3\leqslant y_0\leqslant3$)，则点 B 到直线 AP 的距离 $d_B=\dfrac{|x_0+2y_0-6|}{\sqrt{5}}$，所以 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}|AP|\cdot d_B$，即 $9=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{|x_0+2y_0-6|}{\sqrt{5}}$，即$|x_0+2y_0-6|=$

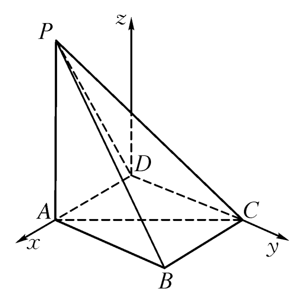
12,即 $y_0=-\frac{1}{2}x_0-3$ 或 $y_0=-\frac{1}{2}x_0+9\left(\text{由于}-2\sqrt{3}\leqslant x_0\leqslant 2\sqrt{3},\right.$ 此时 $\left.y_0=-\frac{1}{2}x_0+9\geqslant 9-\sqrt{3}>3,\text{故舍去}\right)$,联立 $\begin{cases}y_0=-\frac{1}{2}x_0-3,\\ \frac{x_0^2}{12}+\frac{y_0^2}{9}=1,\end{cases}$ 消去 y_0 得 $x_0\cdot(x_0+3)=0$,故点 B 的坐标为 $\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$,$(0,-3)$,故直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=\frac{3}{2}x-3$.

解法 3 由(1)知 $C:\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$,$|AP|=\frac{3\sqrt{5}}{2}$,直线 AP 的方程为 $x+2y-6=0$.设点 $B(2\sqrt{3}\cos\theta,3\sin\theta)$,$0\leqslant\theta<2\pi$,则点 B 到直线 AP 的距离 $d_B=\frac{|2\sqrt{3}\cos\theta+6\sin\theta-6|}{\sqrt{5}}$,所以 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot|AP|\cdot d_B$,即 $9=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{|2\sqrt{3}\cos\theta+6\sin\theta-6|}{\sqrt{5}}$,化简整理得 $\left|4\sqrt{3}\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-6\right|=12$,即 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$(舍去),解得 $\theta=\frac{7\pi}{6}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{2}$,故点 B 的坐标为 $\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$,$(0,-3)$,故直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=\frac{3}{2}x-3$.

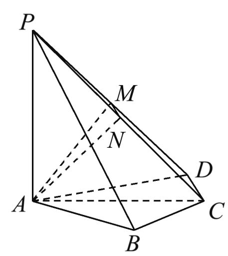
解后反思 本题第(2)问,按照解法 1 做,代数变形要求较高;按照解法 2 做要判别直线 l 与椭圆相交,按照解法 3 做运算量最小,能够遵循“多想一点,少算一点”的要求.解圆锥曲线题的关键就在于翻译,翻译得当可以减少运算量,降低题目难度,提高准确率.

17. (1)**证明**:因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$AD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AD$.又因为 $AD\perp PB$,$PA\cap PB=P$,$PA,PB\subset$ 平面 PAB,所以 $AD\perp$ 平面 PAB.[1]因为 $AB\subset$ 平面 PAB,所以 $AD\perp AB$.在 $\triangle ABC$ 中,$AB^2+BC^2=AC^2$,所以 $AB\perp BC$.因为 A,B,C,D 四点共面,所以 $AD/\!/BC$.又因为 $BC\subset$ 平面 PBC,$AD\not\subset$ 平面 PBC,所以 $AD/\!/$ 平面 PBC.[2]

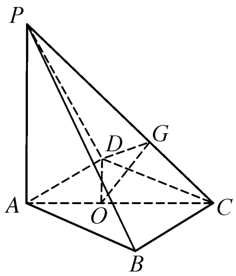
(2)**解法 1** 以 DA,DC 所在直线分别为 x 轴和 y 轴,以过点 D 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.设 $AD=t$,则 $DC=\sqrt{4-t^2}$,则 $A(t,0,0)$,$P(t,0,2)$,$D(0,0,0)$,$C(0,\sqrt{4-t^2},0)$.设平面 ACP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{AC}=(-t,\sqrt{4-t^2},0)$,$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-tx+\sqrt{4-t^2}\,y=0,\\ 2z=0,\end{cases}$ 可得 $z=0$,取 $y=t$,则 $x=\sqrt{4-t^2}$,所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{4-t^2},t,0)$.设平面 CPD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,$\overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{4-t^2},0)$,$\overrightarrow{DP}=(t,0,2)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{4-t^2}\,b=0,\\ ta+2c=0,\end{cases}$ 可得 $b=0$,取 $a=-2$,则 $c=t$,所以 $\boldsymbol{n}=(-2,0,t)$.因为二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$,所以其余弦值的绝对值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$,则 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2\sqrt{4-t^2}|}{2\times\sqrt{t^2+4}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$,解得 $t=\sqrt{3}$,所以 $AD=\sqrt{3}$.



解法 2 如图,作 $AM\perp PD$ 于点 M,$MN\perp PC$ 于点 N,连接 AN.因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,所以 $PA\perp CD$.又 $AD\perp CD$,所以 $CD\perp$ 平面 PAD.因为 $AM\subset$ 平面 PAD,所以 $CD\perp AM$.因为 $AM\perp PD$,所以 $AM\perp$ 平面 PCD.因为 $MN\subset$ 平面 PCD,所以 $AM\perp MN$ 且 $AM\perp PC$,所以 $PC\perp$ 平面 AMN.所以 $PC\perp AN$.因此 $\angle MNA$ 为二面角 $A-CP-D$ 的平面角,即 $\sin\angle MNA=\frac{\sqrt{42}}{7}$.因为 $PA=AC$,所以 N 为 PC 中点且 $AN=\sqrt{2}$.在 $\triangle AMN$ 中,$AM=AN\cdot\sin\angle MNA=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.在 $\triangle APD$ 中,$\sin\angle APM=\frac{AM}{PA}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,$AD=PA\cdot\tan\angle APM=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.



解法 3 过点 D 作 $DO\perp AC$,垂足为 O.因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,$PA\subset$ 平面 PAC,所以平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$.又平面 $PAC\cap$ 平面 $ABCD=AC$,$DO\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $DO\perp$ 平面 PAC.因为 $PC\subset$ 平面 PAC,所以 $DO\perp PC$.再过点 O 作 $OG\perp PC$,垂足为 G,连接 DG.因为 $DO\cap OG=O$,$DO,OG\subset$ 平面 DOG,所以 $PC\perp$ 平面 DOG.又 $DG\subset$ 平面 DOG,所以 $PC\perp DG$,所以 $\angle DGO$ 为二面角 $A-CP-D$ 的平面角.因为 $DO\perp$ 平面 PAC,$OG\subset$ 平面 PAC,所以 $DO\perp OG$,在 $\mathrm{Rt}\triangle DOG$ 中,$\sin\angle DGO=\frac{\sqrt{42}}{7}=\frac{DO}{DG}$ ①.在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$AC=2$,设 $AD=x$,则 $DC=\sqrt{4-x^2}$.所以 $\frac{1}{2}AD\cdot DC=\frac{1}{2}AC\cdot DO$,所以 $DO=\frac{AD\cdot DC}{AC}=\frac{x\cdot\sqrt{4-x^2}}{2}$ ②.因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,$CD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp CD$.又 $AD\perp CD$,$PA\cap AD=A$,PA,$AD\subset$ 平面 PAD,所以 $CD\perp$ 平面 PAD.又 $PD\subset$ 平面 PAD,所以 $CD\perp PD$.因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,$AD,AC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AD$,$PA\perp AC$.在 $\mathrm{Rt}\triangle PAD$ 中,$PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=\sqrt{4+x^2}$.在 $\mathrm{Rt}\triangle PAC$ 中,$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=2\sqrt{2}$.在 $\mathrm{Rt}\triangle PDC$ 中,$\frac{1}{2}PD\cdot DC=\frac{1}{2}PC\cdot DG$,所以 $DG=\frac{PD\cdot DC}{PC}=\frac{\sqrt{4+x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}}{2\sqrt{2}}$ ③.将②式和③式代入①式,得 $\frac{\sqrt{42}}{7}=\frac{x\cdot\sqrt{4-x^2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}}$,即 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$,解得 $x=\sqrt{3}$,所以 $AD=\sqrt{3}$.



规范书写【1】运用线面垂直的判定定理证明，需要写全5个条件，少写扣1分.

【2】证明线面平行需要写全3个条件，少写扣1分.

18. (1)**解**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,2)$. 当 $b=0$ 时，$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax$，$f'(x)=\frac{2-x}{x}\cdot\frac{2-x+x}{(2-x)^2}+a=\frac{2}{x(2-x)}+a\geqslant0$ 对任意 $0<x<2$ 恒成立.

【启发式分析】不等式恒成立问题，往往转化为函数的最值求解.

而当 $0<x<2$ 时，$y=x(2-x)=-(x-1)^2+1>0$，且最大值为1，故 $\left[\frac{2}{x(2-x)}+a\right]_{\min}=a+2\geqslant0$，解得 $a\geqslant-2$，故 a 的最小值为 -2.

(2)**【启发式分析】**因为函数的定义域为 $(0,2)$，且定义域也关于对称中心对称，所以可以猜想到对称中心的横坐标为1，为此计算 $f(2-x)+f(x)$ 得到其值为定值即可.

证明：因为 $x\in(0,2)$，且 $f(2-x)+f(x)=\ln\frac{2-x}{x}+a(2-x)+b(1-x)^3+\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3=2a$，所以曲线 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,a)$ 对称，即曲线 $f(x)$ 是中心对称图形.

(3)**解**：因为 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$ 时成立，又曲线 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,a)$ 对称，所以 $a=-2$，则 $f(x)=\ln\frac{x}{2-x}-2x+b(x-1)^3>-2$ 对任意 $1<x<2$ 恒成立. $f'(x)=\frac{2}{x(2-x)}-2+3b(x-1)^2=\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}+3b(x-1)^2=(x-1)^2\left[\frac{2}{x(2-x)}+3b\right]$.

【启发式分析】无法直接判断导函数的正负，需要构造函数，结合函数的单调性，确定函数值的正负.

令 $g(x)=\frac{2}{x(2-x)}+3b$，$g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，$g(1)=2+3b$.

【启发式分析】$g(x)$ 在 $(1,2)$ 上的正负，取决于 $g(1)$ 的大小关系. 因此需要对 $2+3b$ 的正负关系分类讨论.

当 $2+3b\geqslant0$，即 $b\geqslant-\frac{2}{3}$ 时，$g(x)>g(1)\geqslant0$，则 $f'(x)>0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，则 $f(x)>f(1)=-2$，满足题意；当 $2+3b<0$，即 $b<-\frac{2}{3}$ 时，令 $g(x)=0$，则 $x=\frac{6b-\sqrt{36b^2+24b}}{6b}=1+\sqrt{1+\frac{2}{3b}}<2$，则在 $\left(1,1+\sqrt{1+\frac{2}{3b}}\right)$ 上，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，则 $f(x)<f(1)=-2$，不成立. 综上，实数 b 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

解后反思 1. 有关对称性判断或证明需要熟知判断方法，即若 $f(x+a)+f(-x+b)=c$，则函数 $f(x)$ 关于点 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 中心对称；若 $f(x+a)=f(-x+b)$，则函数 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

2. 第(3)问，根据 $f(x)>-2$ 对任意 $1<x<2$ 恒成立，求 b 的取值范围，实际运用以证代算的方法，需要关注端点函数值，观察到 $f(1)=-2$，因此只需 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增即可，从而明确了解题的方向.

19. (1)**【启发式分析】**对于等差数列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6，只要保留连续的四项必为等差数列.

解法1 显然对于 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 去掉两项 a_1,a_2；a_1,a_6；a_5,a_6，剩下的四项依然成等差数列，故所有 (i,j) 的取值为 $(1,2)$，$(1,6)$，$(5,6)$，可以使得 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 是 (i,j)-可分数列.

解法2 记数列 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 的公差为 d. 因为 $|a_6-a_1|=5d$，所以新数列的公差的绝对值应当小于等于 $\frac{5}{3}d$. 因为 $1<\frac{5}{3}<2$，所以从 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 中删去两项 a_i 和 $a_j(i<j)$ 后剩余等差数列的公差只能为 d，所以满足题意的全部 (i,j) 为 $(1,2)$，$(1,6)$，$(5,6)$.

(2)**【启发式分析】**由于 a_2,a_{13} 在前3组中，由此先讨论 $m=3$ 的情形.

证明：当 $m=3$ 时，去掉 a_2,a_{13}，剩下数分为3组，可知：a_1,a_4,a_7,a_{10} 成等差数列；a_3,a_6,a_9,a_{12} 成等差数列；a_5,a_8,a_{11},a_{14} 成等差数列. 再讨论当 $m>3$ 时，去掉 a_2,a_{13} 后，分为 m 组，只需让前面的3组数列按 $m=3$ 时分组，即 a_1,a_4,a_7,a_{10}；a_3,a_6,a_9,a_{12}；a_5,a_8,a_{11},a_{14}，后面的数每4个相邻的项分为一组即可，即 $a_{15},a_{16},a_{17},a_{18},\cdots,a_{4m-1},a_{4m},a_{4m+1},a_{4m+2}$，则每一组都能构成等差数列，所以数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 $(2,13)$-可分数列.

(3)**证明**：易得 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)-可分数列，等价于下标 $1,2,\cdots,4m+2$ 是 (i,j)-可分数列.

【启发式分析】从 $4m+2$ 个数中选两个数有 C_{4m+2}^2 种方法，因此只要确定好分组，通过计数原理计算出可分数列的个数.

先证明对于数列 $1,2,\cdots,4m+2$ 是 $(4k+1,4r+2)(0\leqslant k\leqslant r\leqslant m,k,r\in\mathbf{N})$ 可分的数列，删去 $4k+1,4r+2$ 后，可分组如下：$(1,2,3,4),\cdots,(4k-3,4k-2,4k-1,4k)$，$(4k+2,4k+3,4k+4,4k+5),\cdots,(4r-2,4r-1,4r,4r+1)$，$(4r+3,4k+4,4k+5,4k+6),\cdots,(4m-1,4m,4m+1,4m+2)$，则该种情况下有 $C_{m+1}^2+m+1=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ 种可分数列. 再证明数列 $1,2,\cdots,4m+2$ 是 $(4k+2,4r+1)$ 可分的，其中 $k<r-1,k,r\in\mathbf{N}$，且 $r\leqslant m$，删去 $4k+2,4r+1$，前 $4k$ 个数分组如下：$(1,2,3,4),\cdots,(4k-3,4k-2,4k-1,4k)$. $4r+2$ 后 $4(m-r)$ 个数分组如下：$(4r+3,4r+4,4r+5,4r+6),\cdots,(4m-1,4m,4m+1,4m+2)$. 对于 $4k+1,4k+3,4k+4,\cdots,4r+2$，共 $4(r-k)$ 个数，可以平均分为 $(r-k)$ 组，令 $t=r-k$，$1<t\leqslant m$，则 $4k+1,4k+1+t,4k+1+2t,4k+1+3t$ 成等差数列；$4k+3,4k+3+t,4k+3+2t,4k+3+3t$ 成等差数列；$\cdots4k+2+t,4k+2+2t,4k+2+3t,4k+2+4t$ 成等差数列. 且该种情形下共有 $1+2+\cdots+(m-1)=\frac{m(m-1)}{2}$ 种可分数列. 综上，$P_m\geqslant\frac{\frac{(m+1)(m+2)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}}{C_{4m+2}^2}=\frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}=\frac{1}{8-\frac{2m+7}{m^2+m+1}}>\frac{1}{8}$.

2024年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅱ

1. C $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

2. B　对于命题 p，取 $x=-1$，则有 $|x+1|=0<1$，故 p 是假命题，$\neg p$ 是真命题；对于命题 q，取 $x=1$，则有 $x^3=x=1$，故 q 是真命题，$\neg q$ 是假命题. 综上，$\neg p$ 和 q 都是真命题.

3. B　因为 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $\boldsymbol{b}^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 又 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$，所以 $1+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=1+6\boldsymbol{b}^2=4$，所以 $|\boldsymbol{b}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

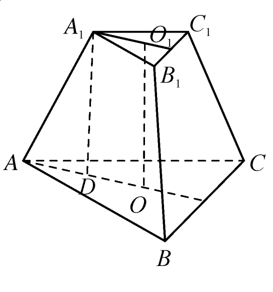
4. C　对于 A，$6+12+18=36<50$，所以亩产量的中位数不小于 1050 kg，故 A 错误；对于 B，亩产量不低于 1100 kg 的频数为 $24+10=34$，所以低于 1100 kg 的稻田占比为 $\dfrac{100-34}{100}=66\%<80\%$，故 B 错误；对于 C，设极差为 a，则 $1150-950<a<1200-900$，即 $200<a<300$，故 C 正确；对于 D，100 块稻田亩产量的平均值为 $\dfrac{1}{100}\times(6\times925+12\times975+18\times1025+30\times1075+24\times1125+10\times1175)=1067$，故 D 错误.

5. A　设点 $M(x,y)$，$P(x,y_0)$，则 $P'(x,0)$. 因为 M 为 PP' 的中点，所以 $y_0=2y$，即 $P(x,2y)$. 又点 P 在曲线 $x^2+y^2=16(y>0)$ 上，所以 $x^2+4y^2=16(y>0)$，即 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1(y>0)$，即点 M 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1(y>0)$.

6. D　设 $F(x)=f(x)-g(x)=a(x+1)^2-1-(\cos x+2ax)=ax^2+a-1-\cos x$，$x\in(-1,1)$，易知函数 $F(x)$ 是偶函数. 因为当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点，所以函数 $F(x)$ 有唯一零点，结合函数 $F(x)$ 是偶函数知 $F(0)=0$，即 $a-1-\cos 0=0$，解得 $a=2$. 若 $a=2$，则 $F(x)=2x^2+1-\cos x$，$x\in(-1,1)$. 又因为 $2x^2\geqslant0$，$1-\cos x\geqslant0$，所以 $F(x)\geqslant0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，即 $F(x)$ 有且仅有一个零点 0，所以 $a=2$ 符合题意.

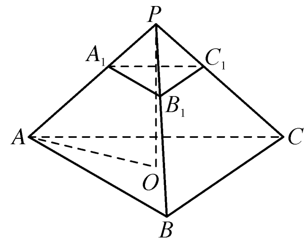
7. B　**解法 1(定义法)**　**【启发式分析】**根据台体的体积公式可得三棱台的高 $h=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，通过作截面，结合正三棱台的结构特征求得上、下底面外接圆的半径，进而根据线面角的定义求解.

如图，易知 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times36=9\sqrt{3}$，$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times4=\sqrt{3}$. 设正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h，则其体积为 $\dfrac{(9\sqrt{3}+\sqrt{9\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\sqrt{3})h}{3}=\dfrac{52}{3}$，解得 $h=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. 设正三角形 ABC、正三角形 $A_1B_1C_1$ 的中心分别为 O,O_1，连接 O_1O，则 $O_1O\perp$ 平面 ABC，$OA=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times6=2\sqrt{3}$，$O_1A_1=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 过点 A_1 作 $A_1D\perp AO$，垂足为 D. 因为 $O_1O\perp$ 平面 ABC，$AO\subset$ 平面 ABC，所以 $O_1O\perp AO$，所以 $A_1D/\!/O_1O$，所以 $A_1D\perp$ 平面 ABC，所以 A_1A 与平面 ABC 所成的角即为 $\angle A_1AD$，则 $\tan\angle A_1AD=\dfrac{A_1D}{AD}=\dfrac{h}{OA-OD}=\dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}=1$.



解法 2(补体法)　**【启发式分析】**可以将正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥 $P-ABC$，A_1A 与平面 ABC 所成的角即为 PA 与平面 ABC 所成的角. 根据比例关系可得 $V_{三棱锥P-ABC}=18$，进而可求正三棱锥 $P-ABC$ 的高，即可得结果.

如图，将正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥 $P-ABC$，则 A_1A 与平面 ABC 所成的角即为 PA 与平面 ABC 所成的角.



因为 $\dfrac{PA_1}{PA}=\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{1}{3}$，所以 $\dfrac{V_{三棱锥P-A_1B_1C_1}}{V_{三棱锥P-ABC}}=\dfrac{1}{27}$，所以 $V_{三棱台ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{26}{27}V_{三棱锥P-ABC}=\dfrac{52}{3}$，即 $V_{三棱锥P-ABC}=18$. 设正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 d，则 $V_{三棱锥P-ABC}=\dfrac{1}{3}d\times\dfrac{1}{2}\times6\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=18$，解得 $d=2\sqrt{3}$. 取底面 ABC 的中心为 O，连接 PO，则 $PO\perp$ 底面 ABC，且 $AO=\dfrac{2}{3}\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，所以 $\angle PAO$ 即为 PA 与平面 ABC 所成的角，则 $\tan\angle PAO=\dfrac{PO}{AO}=1$.

8. C　**【启发式分析】**提问：$f(x)\geqslant0$ 恒成立，无论是分离变量，还是直接求最值，都不好处理，那么如何求解呢？可以考虑分解为两个函数 $g(x)=x+a$，$h(x)=\ln(x+b)$，分析函数值正负的取值情形.

当 $x<-a$ 时，$x+a<0$；当 $x>-a$ 时，$x+a>0$. 当 $-b<x<1-b$ 时，$\ln(x+b)<0$；当 $x>1-b$ 时，$\ln(x+b)>0$. 若 $f(x)\geqslant0$ 恒成立，则必有 $-a=1-b$，即 $b-a=1$.

解法 1　所以 $a^2+b^2=a^2+(a+1)^2=2\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}$，所以当 $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时，a^2+b^2 取最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

解法 2　将问题转化为求直线 $a-b+1=0$ 上的点到坐标原点的距离的最小值. 由点到直线的距离公式可得 $d=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 a^2+b^2 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

解后反思　设问为两个参数的平方和的最小值，解法 1 利用换元转化为二次函数来求最值，解法 2 通过转化为求两点间距离的最小值来求解. 两种解法都是常规方法，解题的关键在于如何转化.

9. BC　对于 A，令 $f(x)=\sin 2x=0$，解得 $x=\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即为 $f(x)$ 的零点，令 $g(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，解得 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，即为 $g(x)$ 的零点，显然 $f(x)$，$g(x)$ 的零点不相同，故 A 错误；对于 B，$f(x)_{\max}=g(x)_{\max}=1$，故 B 正确；对于 C，$f(x)$，$g(x)$ 的最小正周期均为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故 C 正确；对于 D，$f(x)$ 的对称轴满足 $2x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，$g(x)$ 的对称轴满足 $2x-\dfrac{\pi}{4}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=$

$\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$,显然 $f(x)$,$g(x)$的图象的对称轴不相同,故 D 错误.

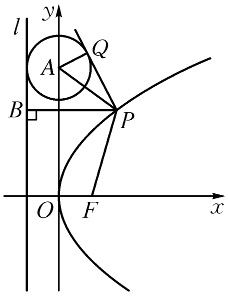
10. ABD　对于 A,如图,抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$,圆 A 的圆心$(0,4)$到直线 $x=-1$ 的距离为 1,等于圆的半径,故准线 l 和圆 A 相切,故 A 正确. 对于 B,当 P,A,B 三点共线时,$PA\perp l$,则点 P 的纵坐标 $y_P=4$. 又 $y_P^2=4x_P$,所以 $x_P=4$,故 $P(4,4)$. 此时切线长$|PQ|=\sqrt{|PA|^2-r^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$,故 B 正确. 对于 C,当$|PB|=2$ 时,$x_P=1$,此时 $y_P^2=4x_P=4$,故点 P 的坐标为$(1,2)$或$(1,-2)$. 当点 P 的坐标为$(1,2)$时,则 $B(-1,2)$,此时 $k_{PA}=\dfrac{4-2}{0-1}=-2$,$k_{AB}=\dfrac{4-2}{0-(-1)}=2$,不满足 $k_{PA}\cdot k_{AB}=-1$;当点 P 的坐标为$(1,-2)$时,则 $B(-1,-2)$,$k_{PA}=\dfrac{4-(-2)}{0-1}=-6$,$k_{AB}=\dfrac{4-(-2)}{0-(-1)}=6$,不满足 $k_{PA}\cdot k_{AB}=-1$. 所以 $PA\perp AB$ 不成立,故 C 错误. 对于 D,

解法 1(轨迹法)　**【启发式分析】**可以根据抛物线的定义转化,得到$|PA|=|PF|$,可知点 P 在线段 AF 的中垂线上,从而转化为 AF 的中垂线和抛物线的交点个数求解.

根据抛物线的定义可知$|PB|=|PF|$,则$|PA|=|PF|$,所以点 P 在线段 AF 的中垂线上. 又线段 AF 的中点坐标为$\left(\dfrac{1}{2},2\right)$,$k_{AF}=\dfrac{4-0}{0-1}=-4$,所以线段 AF 的中垂线的方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$,即 $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{15}{8}$,联立$\begin{cases}y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{15}{8},\\ y^2=4x,\end{cases}$消去 y,整理得 $x^2-49x+\dfrac{225}{4}=0$,则 $\Delta=49^2-4\times\dfrac{225}{4}>0$,即直线 $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{15}{8}$与抛物线 C 有两个交点,则满足$|PA|=|PB|$的点 P 有且仅有 2 个,故 D 正确.

解法 2(设点法)　**【启发式分析】**直接设 $P\left(\dfrac{t^2}{4},t\right)$,根据两点间的距离公式列式化简,从而转化为求关于 t 的方程解的个数的问题.

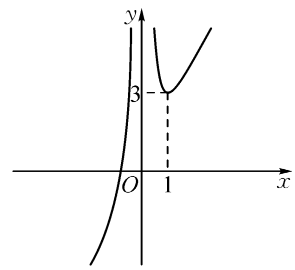
设 $P\left(\dfrac{t^2}{4},t\right)$,由 $PB\perp l$ 可得 $B(-1,t)$. 又 $A(0,4)$,且$|PA|=|PB|$,根据两点间的距离公式得$\sqrt{\dfrac{t^4}{16}+(t-4)^2}=\dfrac{t^2}{4}+1$,整理得 $t^2-16t+30=0$,$\Delta=16^2-4\times30=136>0$,则关于 t 的方程有两个解,即存在两个这样的点 P,故 D 正确.



11. AD　对于 A,

解法 1(函数性质法)　$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$. 由于 $a>1$,故当 $x\in(-\infty,0)\cup(a,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(-\infty,0)$,$(a,+\infty)$上单调递增,当 $x\in(0,a)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(0,a)$上单调递减,则 $f(x)$在 $x=0$ 处取到极大值,在 $x=a$ 处取到极小值. 因为 $f(0)=1>0$,$f(a)=1-a^3<0$,所以 $f(0)f(a)<0$,根据函数零点存在定理知 $f(x)$在$(0,a)$上有一个零点. 又 $f(-1)=-1-3a<0$,$f(2a)=4a^3+1>0$,所以 $f(-1)f(0)<0$,$f(a)f(2a)<0$,根据函数零点存在定理知 $f(x)$在$(-1,0)$,$(a,2a)$上各有一个零点. 所以当 $a>1$ 时,$f(x)$有三个零点,故 A 正确.

解法 2(图象法)　显然 $x=0$ 不为函数 $f(x)$的零点,则由 $f(x)=0$,可得 $3a=2x+\dfrac{1}{x^2}$. 对于函数 $y=2x+\dfrac{1}{x^2}$,$y'=2-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x^3-1)}{x^3}$. 当 $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$时,$y'>0$,当 $x\in(0,1)$时,$y'<0$,所以该函数在$(-\infty,0)$,$(1,+\infty)$上单调递增,在$(0,1)$上单调递减,其大致的函数图象如图所示.



当 $a>1$ 时,$3a>3$,由图象可知直线 $y=3a$ 与 $y=2x+\dfrac{1}{x^2}$有三个交点,即 $f(x)$有三个零点,故 A 正确. 对于 B,$f'(x)=6x(x-a)$,$a<0$,当 $x\in(a,0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,此时 $f(x)$在 $x=0$ 处取到极小值,故 B 错误. 对于 C,

解法 1(三次函数性质法)　由于三次函数无对称轴,故不存在 a,b,使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$的对称轴,故 C 错误.

解法 2(对称轴定义法)　**【启发式分析】**可以假设存在这样的 a,b,使得 $x=b$ 为 $f(x)$的对称轴,则 $f(x)=f(2b-x)$,据此通过计算来判断.

假设存在这样的 a,b,使得 $x=b$ 为 $f(x)$的对称轴,即存在这样的 a,b 使得 $f(x)=f(2b-x)$,即 $2x^3-3ax^2+1=2(2b-x)^3-3a(2b-x)^2+1$,等式右边含有 x^3 的项为 $-2x^3$,则等式左、右两边 x^3 的系数不相等,所以原等式不成立,所以不存在这样的 a,b,使得 $x=b$ 为 $f(x)$的对称轴,故 C 错误. 对于 D,

解法 1(对称中心定义法)　**【启发式分析】**利用对称中心的性质得 $f(1+x)+f(1-x)=2f(1)$,由此构造恒等式,求出 a 的值.

若点$(1,f(1))$为曲线 $y=f(x)$的对称中心,则有 $f(1+x)+f(1-x)=2f(1)$,即 $2(x+1)^3-3a(x+1)^2+1+2(1-x)^3-3a(1-x)^2+1=6-6a$,化简得$(12-6a)x^2=0$,当 $a=2$ 时,$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(1+x)+f(1-x)=2f(1)$恒成立,故 D 正确.

解法 2(三次函数的对称中心的性质)　**【启发式分析】**可以根据三次函数的对称中心的横坐标是二阶导数的零点,由此求出 a 的值.

$f'(x)=6x^2-6ax$,$f''(x)=12x-6a$. 由 $f''(x)=0$,得 $x=\dfrac{a}{2}$,所以该三次函数的对称中心为$\left(\dfrac{a}{2},f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$. 又$(1,f(1))$是对称中心,所以$\dfrac{a}{2}=1$,即 $a=2$,即存在 $a=2$,使得$(1,f(1))$是 $f(x)$的对称中心,故 D 正确.

解后反思　解决本题需要掌握并熟练运用一些结论:

(1)$f(x)$的对称轴为 $x=b$ 等价于 $f(x)=f(2b-x)$；

(2)$f(x)$关于点(a,b)对称等价于 $f(x)+f(2a-x)=2b$；

(3)任何三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 都有对称中心，对称中心是三次函数的拐点，对称中心的横坐标是二阶导数 $f''(x)=0$ 的解，即$\left(-\frac{b}{3a},f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$是三次函数的对称中心.

12. 95　设数列$\{a_n\}$的公差为 d，则有$\begin{cases}a_1+2d+a_1+3d=7,\\3(a_1+d)+a_1+4d=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-4,\\d=3,\end{cases}$所以 $S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}\cdot d=10\times(-4)+45\times3=95$.

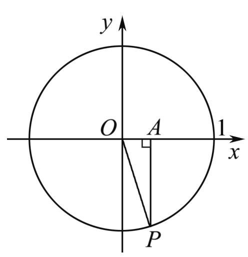
13. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　**解法 1(两角和正切公式+平方关系)　【启发式分析】**要求 $\sin(\alpha+\beta)$的值，可以先求出 $\tan(\alpha+\beta)$，再结合平方关系求解.

因为 $\alpha\in\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(2m\pi+\pi,2m\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$，$k,m\in\mathbf{Z}$，所以 $\alpha+\beta\in((2m+2k)\pi+\pi,(2m+2k)\pi+2\pi)$，$k,m\in\mathbf{Z}$. 又因为 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4}{1-(\sqrt{2}+1)}=-2\sqrt{2}<0$，所以 $\alpha+\beta\in\left((2m+2k)\pi+\frac{3\pi}{2},(2m+2k)\pi+2\pi\right)$，$k,m\in\mathbf{Z}$，则 $\sin(\alpha+\beta)<0$，即 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-2\sqrt{2}$. 又 $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$，解得$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

解法 2(弦化切)　【启发式分析】条件中给出正切关系，可以考虑将弦化切求解.

因为 α 为第一象限角，β 为第三象限角，所以 $\cos\alpha>0$，$\cos\beta<0$. 又 $\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}$，$\cos\beta=\frac{\cos\beta}{\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}}=\frac{-1}{\sqrt{\tan^2\beta+1}}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)=4\cos\alpha\cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}\sqrt{\tan^2\beta+1}}=\frac{-4}{\sqrt{(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(\tan\alpha\tan\beta-1)^2}}=\frac{-4}{\sqrt{4^2+2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

解法 3　由题意得 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-2\sqrt{2}$. 又因为 α 为第一象限角，β 为第三象限角，所以 $\alpha+\beta$ 为第四象限角. 如图，设角 $\alpha+\beta$ 的始边为 x 轴正半轴，终边与单位圆 $x^2+y^2=1$ 的交点为 P，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 A，则$|OP|=1$，$\frac{|PA|}{|OA|}=2\sqrt{2}$，因此 $|PA|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{|PA|}{|OP|}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



14. 24　112　由题意知第一列有 4 个方格可选，第二列有 3 个方格可选，第三列有 2 个方格可选，第四列有 1 个方格可选，所以共有 $4\times3\times2\times1=24$(种)选法. 由于每列数字的十位数均相同，分别为 10，20，30，40，所以问题转化为在下列方格表中，选 4 个方格，且每行和每列均恰有一个方格被选中，则选中方格的 4 个数之和最大.

1	1	1	0
2	2	3	2
3	2	3	3
5	4	4	4

则选中满足条件的方格的 4 个数之和的最大值为 $5+1+3+3=12$，所以在题目所给的方格表中，选中满足条件的方格的 4 个数之和的最大值为 $100+12=112$.

解后反思　解决本题的关键是确定第一、二、三、四列分别有 4，3，2，1 个方格可选，运用分步原理可以顺利求解第一空. 将各数和的最大值转化为个位数和的最大值，运用观察法不难求解第二空.

15. 解：(1)**解法 1(辅助角公式法)**　由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，可得 $\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=1$，即 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=1$. 因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，[1]故 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，解得 $A=\frac{\pi}{6}$.

解法 2(同角三角函数的基本关系法)　由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，$\sin^2A+\cos^2A=1$，消去 $\sin A$ 得 $4\cos^2A-4\sqrt{3}\cos A+3=0$，即 $(2\cos A-\sqrt{3})^2=0$，解得 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $A\in(0,\pi)$，[2]所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

(2) 由 $\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，根据正弦定理和二倍角公式得 $\sqrt{2}\sin B\sin C=2\sin C\sin B\cos B$. 又 $B,C\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\sin C\neq0$，[3]则 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$，所以 $\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$，[4]解得 $b=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，故$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=2+\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.

规范书写【1】需要写出 $A+\frac{\pi}{3}$ 的取值范围，不写扣 1 分.

【2】需要写出角 A 的取值范围，不写扣 1 分.

【3】需要指明 $\sin B\sin C\neq0$，否则扣 1 分.

【4】在运用正弦定理或余弦定理时，需要写出定理的名称.

16. 解：(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1$，可得 $f(1)=e-2$，$f'(1)=e-1$，即切点坐标为$(1,e-2)$，切线斜率 $k=e-1$，所以切线方程为 $y-(e-2)=(e-1)(x-1)$，即$(e-1)x-y-1=0$.

(2)因为 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)=e^x-a$.

【启发式分析】由于 $e^x>0$，因此需要分 $a\leqslant0$ 和 $a>0$ 确定导数的正负，从而得到函数的单调性以及极值.

若 $a\leqslant0$，则 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立，所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无极值，不符合题意；若 $a>0$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>\ln a$，令 $f'(x)<0$，解得 $x<\ln a$，所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增，则 $f(x)$有极小值为 $f(\ln a)=a-a\ln a-a^3$，无极大值. 由题

意可得 $f(\ln a)=a-a\ln a-a^3<0$,即 $a^2+\ln a-1>0$.

【启发式分析】无法直接解不等式,需要构造函数,根据单调性求解.

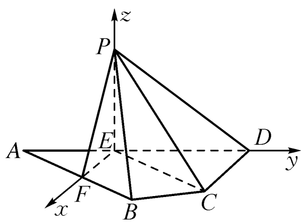
令 $g(a)=a^2+\ln a-1$,则 $g'(a)=2a+\dfrac{1}{a}>0$ 恒成立,故 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.又 $g(1)=0$,$g(a)>0$,所以 $a>1$,故 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

17. (1)【启发式分析】要证明线线垂直往往通过证明线面垂直得到,为此考虑证明 $EF\perp$ 平面 PDE,可得 $EF\perp PD$.

证明:由 $AB=8$,$AD=5\sqrt{3}$,$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,得 $AE=2\sqrt{3}$,$AF=4$.又 $\angle BAD=30°$,在 $\triangle AEF$ 中,由余弦定理得 $EF=\sqrt{AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cos\angle BAD}=\sqrt{12+16-2\times2\sqrt{3}\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2$,所以 $AE^2+EF^2=AF^2$,则 $AE\perp EF$,即 $EF\perp AD$.由翻折性质可知 $EF\perp PE$,$EF\perp DE$.又 $PE\cap DE=E$,$PE,DE\subset$ 平面 PDE,所以 $EF\perp$ 平面 PDE.又 $PD\subset$ 平面 PDE,所以 $EF\perp PD$.

(2)【启发式分析】需建立空间直角坐标系,为此,要找到过一点的三条直线两两垂直,可以先证明 $PE\perp$ 平面 $ABCD$.

解:连接 CE,由 $\angle ADC=90°$,$ED=AD-AE=3\sqrt{3}$,$CD=3$,得 $CE^2=ED^2+CD^2=36$.在 $\triangle PEC$ 中,由 $PC=4\sqrt{3}$,$PE=2\sqrt{3}$,$CE=6$,得 $CE^2+PE^2=PC^2$,所以 $PE\perp EC$.由(1)知 $PE\perp EF$,又 $EC\cap EF=E$,$EC,EF\subset$ 平面 $ABCD$,[1]所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$.又 $ED\subset$ 平面 $ABCD$.所以 $PE\perp ED$,所以 PE,EF,ED 两两垂直.[2]以 E 为原点,$\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$,



则 $E(0,0,0)$,$P(0,0,2\sqrt{3})$,$D(0,3\sqrt{3},0)$,$C(3,3\sqrt{3},0)$,$F(2,0,0)$,$A(0,-2\sqrt{3},0)$.由 F 是 AB 的中点,得 $B(4,2\sqrt{3},0)$,所以 $\overrightarrow{PC}=(3,3\sqrt{3},-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{PD}=(0,3\sqrt{3},-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{PB}=(4,2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{PF}=(2,0,-2\sqrt{3})$.设平面 PCD 和平面 PBF 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=3x_1+3\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}z_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=3\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=2$,则 $x_1=0$,$z_1=3$,所以 $\boldsymbol{n}=(0,2,3)$.又 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=4x_2+2\sqrt{3}y_2-2\sqrt{3}z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PF}=2x_2-2\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=\sqrt{3}$,则 $y_2=-1$,$z_2=1$,所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,1)$.设平面 PCD 和平面 PBF 所成的二面角为 θ,所以 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{65}}{65}$,则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$,[3]即平面 PCD 与平面 PBF 所成的二面角的正弦值为 $\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$.

规范书写 【1】运用线面垂直的判定定理时需要写出 5 个条件,少写扣 1~2 分.

【2】需要证明 PE,EF,ED 两两垂直,否则扣 2 分.

【3】需要运用平方关系,求出平面 PCD 和平面 PBF 所成的二面角的正弦值,若求解错误,则扣 2 分.

18. 解:(1)甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分,则甲第一阶段至少投中 1 次,乙第二阶段也至少投中 1 次,所以比赛成绩不少于 5 分的概率 $P=[1-(1-0.4)^3]\times[1-(1-0.5)^3]=0.686$.

(2)①【启发式分析】先各自计算出甲先参加第一阶段比赛以及乙先参加第一阶段比赛得 15 分的概率,再运用作差法比较大小即可.

若甲先参加第一阶段比赛,则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_{甲}=[1-(1-p)^3]\cdot q^3$,若乙先参加第一阶段比赛,则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_{乙}=[1-(1-q)^3]\cdot p^3$.因为 $0<p<q$,所以 $P_{甲}-P_{乙}=q^3-(q-pq)^3-p^3+(p-pq)^3=(q-p)(q^2+pq+p^2)+(p-q)[(p-pq)^2+(q-pq)^2+(p-pq)(q-pq)]=(p-q)(3p^2q^2-3p^2q-3pq^2)=3pq(p-q)(pq-p-q)=3pq(p-q)[(1-p)(1-q)-1]>0$,所以 $P_{甲}>P_{乙}$,应该由甲参加第一阶段比赛.

②【启发式分析】首先得到 X 和 Y 的所有可能取值,再按步骤列出分布列,计算出各自的数学期望,再次作差比较大小即可.

若甲先参加第一阶段比赛,数学成绩 X 的所有可能取值为 0,5,10,15,$P(X=0)=(1-p)^3+[1-(1-p)^3]\cdot(1-q)^3$,$P(X=5)=[1-(1-p)^3]\cdot C_3^1q(1-q)^2$,$P(X=10)=[1-(1-p)^3]\cdot C_3^2q^2(1-q)$,$P(X=15)=[1-(1-p)^3]\cdot q^3$,所以 $E(X)=15[1-(1-p)^3]q=15(p^3-3p^2+3p)q$.若乙先参加第一阶段比赛,数学成绩 Y 的所有可能取值为 0,5,10,15,同理 $E(Y)=15(q^3-3q^2+3q)\cdot p$,所以 $E(X)-E(Y)=15[pq(p+q)(p-q)-3pq(p-q)]=15(p-q)pq(p+q-3)$.因为 $0<p<q<1$,所以 $p-q<0$,$p+q-3<1+1-3<0$,则 $(p-q)pq(p+q-3)>0$,所以应该由甲参加第一阶段比赛.

解后反思 本题第(2)问的关键是计算出相关概率和期望,采用作差法并因式分解,从而比较出大小关系,最后得到结论,要想顺利求解,不仅需要熟练地构建独立事件的概率模型,还需有较强的代数运算求解能力.

19. (1)**解**:因为点 $P_1(5,4)$ 在双曲线 $C:x^2-y^2=m(m>0)$ 上,所以 $m=5^2-4^2=9$,直线 P_1Q_1 的方程为 $y-4=\dfrac{1}{2}(x-5)$,即 $x-2y+3=0$,联立 $\begin{cases}x^2-y^2=9,\\ x-2y+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-3,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\ y=4\end{cases}$(舍),则点 $Q_1(-3,0)$,点 $P_2(3,0)$,所以 $x_2=3$,$y_2=0$.

(2)**证法 1(点差法)** 【启发式分析】要证明 $\{x_n-y_n\}$ 为等比数列,就需寻找 x_n-y_n 与 $x_{n-1}-y_{n-1}$ 之间的递推关系,可以抓住 P_{n-1},Q_{n-1} 都在同一条斜率为 k 的直线上,以及 P_{n-1},Q_{n-1} 都在双曲线上建立方程组,化简即可证得.

因为 $P_n(x_n,y_n)$ 关于 y 轴的对称点是 $Q_{n-1}(-x_n,y_n)$,而 $P_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$,而 P_{n-1},Q_{n-1} 都在同一条斜率为 k 的直线上,所以 $x_{n-1}\neq-x_n$,$\dfrac{y_n-y_{n-1}}{-x_n-x_{n-1}}=k$.因为点 P_{n-1},Q_{n-1} 都在双曲线上,所以 $\begin{cases}x_n^2-y_n^2=9 & ①,\\ x_{n-1}^2-y_{n-1}^2=9 & ②,\end{cases}$ ①−②得 $(x_n-x_{n-1})(x_n+x_{n-1})=(y_n-y_{n-1})(y_n+y_{n-1})$.又 $y_n-y_{n-1}=-k(x_n+x_{n-1})$ ③,所以 $x_n-x_{n-1}=-k(y_n+y_{n-1})$ ④,④−③得 $x_n-y_n-(x_{n-1}-y_{n-1})=k(x_n-y_n)+k(x_{n-1}-y_{n-1})$,所以 $(1-k)(x_n-y_n)=(1+k)\cdot$

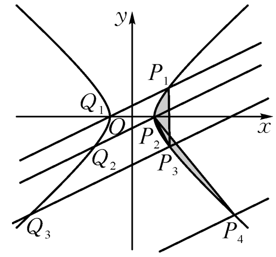
$(x_{n-1}-y_{n-1})$，所以$\frac{x_n-y_n}{x_{n-1}-y_{n-1}}=\frac{1+k}{1-k}$. 又 $x_1-y_1=1\neq0$，[1]所以数列$\{x_n-y_n\}$是公比为$\frac{1+k}{1-k}$的等比数列.

证法 2(设线法) **【启发式分析】**要证明$\{x_n-y_n\}$为等比数列，就需寻找 x_n-y_n 与 $x_{n-1}-y_{n-1}$ 之间的递推关系，可以求出过 $P_n(x_n,y_n)$且斜率为 k 的直线方程并与 $x^2-y^2=9$ 联立，结合根与系数的关系，得到点 Q_n 的坐标，进而可得点 P_{n+1} 的坐标，由此可以构建 x_n-y_n 与 $x_{n-1}-y_{n-1}$ 的递推关系，化简即可得证.

过 $P_n(x_n,y_n)$且斜率为 k 的直线为 $y=k(x-x_n)+y_n$，联立$\begin{cases}x^2-y^2=9,\\ y=k(x-x_n)+y_n,\end{cases}$得 $x^2-[k(x-x_n)+y_n]^2=9$，展开即得$(1-k^2)x^2-2k(y_n-kx_n)x-(y_n-kx_n)^2-9=0$. 由于 $P_n(x_n,y_n)$是直线 $y=k(x-x_n)+y_n$ 和 $x^2-y^2=9$ 的一个公共点，故方程必有一根 $x_1=x_n$. 根据根与系数的关系，另一根 $x_2=\frac{2k(y_n-kx_n)}{1-k^2}-x_n=\frac{2ky_n-x_n-k^2x_n}{1-k^2}$，则 $y_2=k(x_2-x_n)+y_n=\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$，所以该直线与双曲线 C 的不同于 P_n 的交点为 $Q_n\left(\frac{2ky_n-x_n-k^2x_n}{1-k^2},\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}\right)$，而注意到 Q_n 的横坐标亦可通过根与系数的关系表示为$\frac{-(y_n-kx_n)^2-9}{(1-k^2)x_n}<0$，故 Q_n 一定在双曲线C 的左支上，所以 $P_{n+1}\left(\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2},\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}\right)$，即 $x_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}$，$y_{n+1}=\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$，所以 $x_{n+1}-y_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}-\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}=\frac{x_n+k^2x_n+2kx_n}{1-k^2}-\frac{y_n+k^2y_n+2ky_n}{1-k^2}=\frac{1+k^2+2k}{1-k^2}(x_n-y_n)=\frac{1+k}{1-k}(x_n-y_n)$. 又 $x_1-y_1=1\neq0$，所以数列$\{x_n-y_n\}$是公比为$\frac{1+k}{1-k}$的等比数列.

(3)**【启发式分析】**由于 $S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}$ 与 $S_{\triangle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}}$ 有共同的底边 $P_{n+1}P_{n+2}$，因此只要证明等高即可，根据平行线间距离相等，为此只要证明 $P_{n+1}P_{n+2}\,/\!/\,P_nP_{n+3}$，可以通过证明 $\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{y_{n+2}-y_{n+1}}=\frac{x_{n+3}-x_n}{y_{n+3}-y_n}$得.

证明：要证 $S_n=S_{n+1}$，即证 $S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=S_{\triangle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}}$，等价于证明 $P_{n+1}P_{n+2}/\!/P_nP_{n+3}$，记 $t=\frac{1+k}{1-k}$，$0<k<1$，即 $t>1$，所以 $x_n-y_n=(x_1-y_1)\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{n-1}=t^{n-1}$. 又 $x_n^2-y_n^2=9$，所以 $x_n+y_n=9t^{1-n}$，所以 $y_n=\frac{1}{2}(-t^{n-1}+9t^{1-n})$，易知 y_n 单调递减，所以 $y_{n+2}\neq y_{n+1}$，$y_{n+3}\neq y_n$. 则 $P_n\left(x_n,\frac{-t^{n-1}+9t^{1-n}}{2}\right)$，$P_{n+1}\left(x_{n+1},\frac{-t^n+9t^{-n}}{2}\right)$，$P_{n+2}\left(x_{n+2},\frac{-t^{n+1}+9t^{-1-n}}{2}\right)$，$P_{n+3}\left(x_{n+3},\frac{-t^{n+2}+9t^{-2-n}}{2}\right)$，所以$\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{y_{n+2}-y_{n+1}}=\frac{y_{n+2}+t^{n+1}-y_{n+1}-t^n}{y_{n+2}-y_{n+1}}=1+\frac{2t^n(t-1)}{(-t^{n+1}+9t^{-1-n})-(-t^n+9t^{-n})}=1+\frac{2t^n(t-1)}{(-9t^{-1-n}-t^n)(t-1)}=1-\frac{2t^n}{9t^{-1-n}+t^n}$，$\frac{x_{n+3}-x_n}{y_{n+3}-y_n}=\frac{y_{n+3}+t^{n+2}-y_n-t^{n-1}}{y_{n+3}-y_n}=1+\frac{2t^{n-1}(t^3-1)}{(-t^{n+2}+9t^{-2-n})-(-t^{n-1}+9t^{1-n})}=1+\frac{2t^{n-1}(t^3-1)}{(-9t^{-2-n}-t^{n-1})(t^3-1)}=1-\frac{2t^{n-1}}{9t^{-2-n}+t^{n-1}}=1-\frac{2t^n}{9t^{-1-n}+t^n}$，故$\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{y_{n+2}-y_{n+1}}=\frac{x_{n+3}-x_n}{y_{n+3}-y_n}$，即 $P_{n+1}P_{n+2}/\!/P_nP_{n+3}$，即对任意的正整数 n，$S_n=S_{n+1}$.



规范书写【1】证明等比数列要说明首项不为 0，否则扣 1 分.

解后反思 对于本题第(3)问的求解，需要突破两关，其一，要能想到将证明面积相等转化为证明 $P_{n+1}P_{n+2}/\!/P_nP_{n+3}$，其二，证明两线段平行时，需要代入四个点的坐标化简，但由于变量较多，需要消元，先借助于等比数列的通项公式以及 $x_n^2-y_n^2=9$，解方程组，用 t 表示出 y_n，化简，消去 x_{n+2}，x_{n+1}，x_n 以及 x_{n+3}，从而得到关于 t 的关系，化简后，不难证明$\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{y_{n+2}-y_{n+1}}=\frac{x_{n+3}-x_n}{y_{n+3}-y_n}$.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试 · 新高考卷 Ⅰ

1. C $N=\{x\mid x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-2\}$，则 $M\cap N=\{-2\}$.

2. A $z=\frac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，则 $z-\bar{z}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{i}=-\mathrm{i}$.

3. D 依题意$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=0$，则 $\boldsymbol{a}^2+(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda\mu\boldsymbol{b}^2=0$，即 $2+2\lambda\mu=0$，所以 $\lambda\mu=-1$.

4. D 令 $t=x(x-a)$，则 $f(t)=2^t$ 在区间$(0,1)$上单调递增，根据复合函数的单调性可知，$t=x(x-a)$在$(0,1)$上单调递减，则对称轴 $x=\frac{a}{2}\geqslant1$，所以 $a\geqslant2$.

5. A 由题意知 $e_1=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$，$e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$，解得 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6. B 圆的方程可化为$(x-2)^2+y^2=5$，圆心 C 的坐标为$(2,0)$，半径为 $r=\sqrt{5}$，设 $P(0,-2)$，两个切点分别为 A 和 B，则$|PC|=2\sqrt{2}$，$|PA|=\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{3}$.

解法 1 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$，所以 $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

解法 2 易知切线的斜率存在，设切线斜率为 k，则切线方程为 $y=kx-2$. 代入圆方程 $x^2+y^2-4x-1=0$，可得$(1+k^2)x^2-(4k+4)x+3=0$，由 $\Delta=(4k+4)^2-12(1+k^2)=0$，得两条切线 PA，PB 的斜率 k_1，k_2，满足一元二次方程 $k^2+8k+1=0$，因此$|\tan\alpha|=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\sqrt{15}$，故$\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

解法 3 由 $PA\perp CA$，$PB\perp CB$，设点 A，点 B 坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，可得$\frac{y_i}{x_i-2}\cdot\frac{y_i+2}{x_i}=-1$，又 $x_i^2+y_i^2-4x_i-1=0$，可得 $2x_i^2-3x_i-\frac{3}{4}=0$，且 $y_i=-x_i-\frac{1}{2}$. 从而两个切点间的距离 $|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{30}}{2}$. 在$\triangle PAB$ 中，$|PA|=|PB|=\sqrt{3}$，由余弦定理可得 $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

解法 4 由 $PA\perp CA$，$PB\perp CB$，$\angle CPA=\angle CPB$，可得 $AB\perp PC$，四边形 $PACB$ 的面积为$\frac{1}{2}\times|PC|\times|AB|=|PA|\times|CA|$，得$|AB|=\frac{\sqrt{30}}{2}$. 在$\triangle PAB$ 中，由余弦定理可得 $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

解后反思 本题既可以利用两条切线与圆的位置关系并结合两点间距离公式（解法 3）、二倍角公式（解法 1）得到答案；也可以利用设切线方程，利用斜率与两条切线夹角的关系（解法 2）得到答案；也可以利用等形面积公式结合余弦定理（解法 4）得到答案.

7. C　若$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d，则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d$，$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$，则$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$，故甲是乙的充分条件. 若$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，设公差为 d'，则$\frac{S_n}{n}=S_1+(n-1)d'$，则 $S_n=nS_1+n(n-1)d'$，$n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)S_1+(n-1)(n-2)d'$，两式相减得 $a_n=a_1+(n-1)\cdot2d'$，上式对 $n=1$ 也成立，故 $a_n=a_1+(n-1)\cdot2d'$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $a_{n+1}-a_n=2d'$，所以$\{a_n\}$为等差数列，故甲是乙的必要条件，所以甲是乙的充要条件.

解后反思 判断数列$\{a_n\}$是等差数列的常用方法有以下四种：①定义法：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}-a_n$ 是同一常数. ②等差中项法：对任意 $n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}^*$，满足 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$. ③通项公式法：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，满足 $a_n=pn+q$（p，q 为常数）. ④前 n 项和公式法：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，满足 $S_n=An^2+Bn$（A，B 为常数）. 其中③④两种方法，适用于小题，在求解中，较为快捷. 本题中，在判定必要条件时，$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，可以直接设为$\frac{S_n}{n}=kn+b$，则 $S_n=kn^2+bn$，就可以得到$\{a_n\}$为等差数列，避免了烦琐的计算.

8. B　**【启发式分析】**将 $\sin(\alpha-\beta)$展开，就能求出 $\sin\alpha\cos\beta$ 的值，而求解$\cos(2\alpha+2\beta)$自然想到用二倍角余弦公式，结合条件，求出$\sin(\alpha+\beta)$的值，问题就可以解决.

解法 1 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，则 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$，所以$\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$.

解法 2 设 $\sin(\alpha+\beta)=m$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=\cos[2(\alpha+\beta)]=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2m^2$，$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=m-\frac{1}{3}$. 而 $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，所以 $m-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，即 $m=\frac{2}{3}$，从而 $\cos(2\alpha+2\beta)=1-2m^2=\frac{1}{9}$.

解后反思 三角函数式的化简和求值要遵循“三看”原则：一看角，二看名，三看式子结构与特征，要注意观察条件中角之间的联系（和、差、倍、互余、互补等），寻找式子和三角函数公式之间的联系点.

9. BD　对于选项 A，$\frac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4}-\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}=\frac{(x_2+x_3+x_4+x_5)-2(x_1+x_6)}{12}$不一定为 0，故 A 错误；对于选项 B，由于 x_1，x_6 分别为最小值和最大值，这两个数不影响 x_2，x_3，x_4，x_5 按照大小排序的位置，中位数都为中间两个数的平均数，所以相同，故 B 正确；对于选项 C，在 x_1，x_2，…，x_6 中去掉最小值 x_1 与最大值 x_6 得到 x_2，x_3，x_4，x_5，数据更加集中，标准差变小，故 C 错误；对于选项 D，x_2，x_3，x_4，x_5 的极差小于或等于 x_6-x_1，故 D 正确.

10. ACD　对于选项 A，因为 $L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\frac{p_1}{p_0}-20\times\lg\frac{p_2}{p_0}\geqslant0$，所以$\frac{p_1}{p_0}\geqslant\frac{p_2}{p_0}$，则 $p_1\geqslant p_2$，故 A 正确；对于选项 B，因为 $L_{p_2}-L_{p_3}=20\times\lg\frac{p_2}{p_0}-20\times\lg\frac{p_3}{p_0}\leqslant20$，所以 $\lg\frac{p_2}{p_3}\leqslant1$，则$\frac{p_2}{p_3}\leqslant10$，即 $p_2\leqslant10p_3$，故 B 错误；对于选项 C，因为 $L_{p_3}=20\times\lg\frac{p_3}{p_0}=40$，所以 $\lg\frac{p_3}{p_0}=2$，则 $p_3=100p_0$，故 C 正确；对于选项 D，因为 $L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\frac{p_1}{p_0}-20\times\lg\frac{p_2}{p_0}\leqslant90-50=40$，所以 $\lg\frac{p_1}{p_0}-\lg\frac{p_2}{p_0}\leqslant2$，则 $\lg\frac{p_1}{p_2}\leqslant2$，所以 $p_1\leqslant100p_2$，故 D 正确.

11. ABC　令 $x=y=0$，则 $f(0)=0$，故 A 正确；令 $x=y=1$，则 $f(1)=0$，故 B 正确；令 $x=y=-1$，则 $f(1)=2f(-1)=0$，故 $f(-1)=0$，令 $y=-1$，则 $f(-x)=f(x)+x^2f(-1)=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数，故 C 正确；

解法 1 对于选项 D，令 $f(x)=0$，则满足题意，但 $x=0$ 不是它的极小值点，故 D 错误.

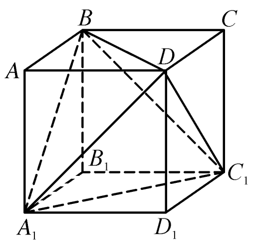
解法 2 **【启发式分析】**对于选项 D，通过 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$来构造同构式来找出满足条件的一般函数.

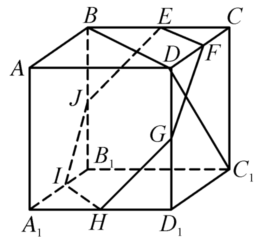
因为 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，当 $x^2y^2\neq0$ 时，有$\frac{f(xy)}{(xy)^2}=\frac{f(x)}{x^2}+\frac{f(y)}{y^2}$，故可设$\frac{f(x)}{x^2}=\log_a|x|$（$a>0$，$a\neq1$），即 $f(x)=x^2\log_a|x|$，故 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x^2\log_a|x|, & x\neq0,\end{cases}$故 D 错误.

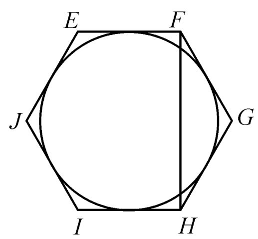
解法 3 对于选项 D，令 $y=x$，则 $f(x^2)=2x^2f(x)$. 因为 $f(x)$是偶函数，所以只需要研究 $x>0$ 的情况，要使 $x=0$ 为 $f(x)$的极小值点，则有 $x\in(0,x_0)\left(x_0<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，$f(x)$单调递增. 取 $x\in(0,x_0)$，则 $0<x^2<x<1$，且 $0<2x^2<1$，①若 $f(x)>0$，则 $f(x^2)>0$，$\frac{f(x^2)}{f(x)}=2x^2<1$，即 $f(x^2)<f(x)$；②若 $f(x)<0$，则 $f(x^2)<0$，即$\frac{-f(x^2)}{-f(x)}=2x^2<1$，即 $f(x^2)>f(x)$，此时，在$(0,x_0)$上，$f(x)$必然不会单调递增，所以 D 错误.

解后反思 在研究抽象函数问题时，通常采用特殊化的方法来进行处理，同时，也可以用所学习过的基本初等函数的性质来找相关的函数模型来帮助处理问题.

12. ABD 对于选项A,由于球的直径为0.99 m,小于正方体的棱长1 m,故球体可以放入正方体容器内,故A正确;对于选项B,如图,连接正方体的面对角线,得正四面体A_1-BC_1D,则它的棱长为$\sqrt{2}>1.4$,故B正确;对于选项C,由于正方体的体对角线长为$\sqrt{3}<1.8$,故C错误;对于选项D,由于高为0.01 m,可忽略不计,看作直径为1.2 m的平面图形,E,F,G,H,I,J为各棱中点,六边形$EFGHIJ$为正六边形,其边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$ m,其内切圆直径为FH,所以$FH=\sqrt{3}FG=\frac{\sqrt{6}}{2}$ m,因为$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}>1.2^2$,所以D正确.



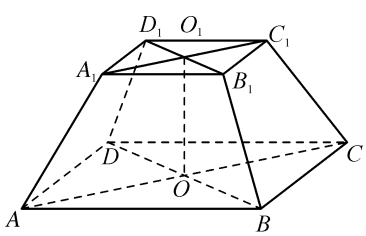




解后反思 本题的难点在于选项D的判断,这当中采用了极限的思想,从而将问题转化为在正方体内能否找一个平面图形,使得这一平面图形能将直径为1.2 m的圆放入其中,其本质是将空间问题平面化.

13. 64 若选修2门课,则需要从体育类和艺术类中各选择1门,共有$C_4^1C_4^1=16$(种)方案;若选修3门课时,共有$C_4^1C_4^2+C_4^2C_4^1=48$(种)方案,故共有$16+48=64$(种)方案.

14. $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ 如图,设O,O_1分别为下底面、上底面的中心,则在直角梯形AA_1O_1O中,$AA_1=\sqrt{2}$,$AO=\sqrt{2}$,$A_1O_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$OO_1=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以该棱台的体积$V=\frac{1}{3}\times(2^2+1^2+\sqrt{2^2\times1^2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

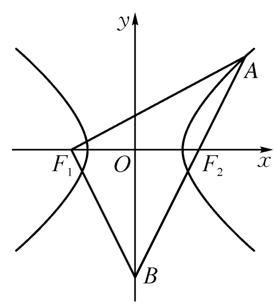


15. $[2,3)$ **解法1** 因为$x\in[0,2\pi]$,所以$\omega x\in[0,2\omega\pi]$,由$f(x)=0$得$\cos\omega x=1$,从而要使$f(x)$在区间$[0,2\pi]$上有且仅有3个零点,则需$4\pi\leqslant2\omega\pi<6\pi$,解得$2\leqslant\omega<3$.

解法2 $f(x)$的零点满足$\cos\omega x=1$,即$x=\frac{2k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$,由于$\omega>0$,所以$f(x)$的非负零点依次为$0,\frac{2\pi}{\omega},\frac{4\pi}{\omega},\frac{6\pi}{\omega},\cdots$.由题设可得$\begin{cases}\frac{4\pi}{\omega}\leqslant2\pi,\\ \frac{6\pi}{\omega}>2\pi,\end{cases}$解得$2\leqslant\omega<3$.因此$\omega$的取值范围是$[2,3)$.

16. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **解法1(坐标法)** **【启发式分析】**注意到$\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$,且点$B$在$y$轴上,因此,可以将点$A$的坐标用点$B$的坐标加以表示,从而利用$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$以及点$A$在双曲线上来得到$a,b,c$之间的关系,求得离心率.

建立如图所示的平面直角坐标系,依题意,设$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,$B(0,n)$,由$\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$,可得$A\left(\frac{5}{3}c,-\frac{2}{3}n\right)$,又$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$,且$\overrightarrow{F_1A}=\left(\frac{8}{3}c,-\frac{2}{3}n\right)$,$\overrightarrow{F_1B}=(c,n)$,则$\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=\left(\frac{8}{3}c,-\frac{2}{3}n\right)\cdot(c,n)=\frac{8}{3}c^2-\frac{2}{3}n^2=0$,即$n^2=4c^2$,又点$A$在$C$上,则$\frac{\frac{25}{9}c^2}{a^2}-\frac{\frac{4}{9}n^2}{b^2}=1$,整理可得$\frac{25c^2}{9a^2}-\frac{4n^2}{9b^2}=1$,代入$n^2=4c^2$,可得$\frac{25c^2}{a^2}-\frac{16c^2}{b^2}=9$,即$25e^2-\frac{16e^2}{e^2-1}=9$,解得$e^2=\frac{9}{5}$或$\frac{1}{5}$(舍去),故$e=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.



解法2(几何法) **【启发式分析】**注意到问题可转化为在$\mathrm{Rt}\triangle AF_1B$中,满足$AF_1\perp BF_1$,$|BF_1|=|BF_2|$,$|BF_2|=\frac{3}{2}|AF_2|$,$|AF_1|-|AF_2|=2a$,$|F_1F_2|=2c$,求$a,c$的关系.应用解三角形的方法来求解.

由$\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$,得$\frac{|F_2A|}{|F_2B|}=\frac{2}{3}$,设$|F_2A|=2x$,$|F_2B|=3x$.由对称性可得$|F_1B|=3x$,由定义可得$|AF_1|=2x+2a$,$|AB|=5x$,设$\angle F_1AF_2=\theta$,则$\sin\theta=\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$,所以$\cos\theta=\frac{4}{5}=\frac{2x+2a}{5x}$,解得$x=a$,所以$|AF_1|=2x+2a=4a$,$|AF_2|=2a$.在$\triangle AF_1F_2$中,由余弦定理可得$\cos\theta=\frac{16a^2+4a^2-4c^2}{16a^2}=\frac{4}{5}$,即$5c^2=9a^2$,可得$e=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

解后反思 求解与圆锥曲线有关的问题时,通常有两种处理方法,一是应用坐标法求解,即通过联立方程组或应用点在曲线上来建立关系式求解;二是应用圆锥曲线的定义来构造几何图形,通过平面几何的方法或解三角形的方法来加以处理.

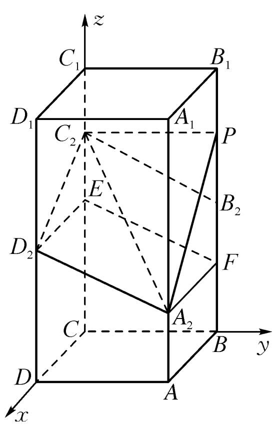
17. 解:(1)因为$2\sin(A-C)=\sin B=\sin(A+C)$,所以$2\sin A\cos C-2\cos A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,则$\sin A\cdot\cos C=3\cos A\sin C$.因为$A+B=3C=\pi-C$,所以$C=\frac{\pi}{4}$,所以$\sin A=3\cos A$.又$\sin^2A+\cos^2A=1$,且$0<A<\pi$,[1]所以$\cos A=$

$\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2)由正弦定理得$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$，则 $BC=\frac{5\times\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3\sqrt{5}$. 又$\sin B=\sin(A+C)=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则边 AB 上的高为 $BC\sin B=3\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=6$.

规范书写【1】在求 $\cos A$ 的值时要指明 $0<A<\pi$.

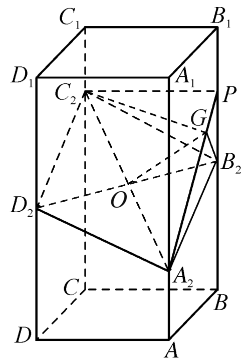
18. (1)**证法 1**　如图，分别取线段 CC_1，BB_2 的中点 E 和 F，连接 D_2E，EF，A_2F. 则 $D_2E \mathrel{\underline{\parallel}} CD$，$A_2F \mathrel{\underline{\parallel}} AB$，又 $CD \mathrel{\underline{\parallel}} AB$，所以 $D_2E \mathrel{\underline{\parallel}} A_2F$，所以四边形 D_2A_2FE 为平行四边形，所以 $A_2D_2 /\!/ EF$. 又 $C_2E \mathrel{\underline{\parallel}} B_2F$，所以四边形 C_2EFB_2 为平行四边形，所以 $B_2C_2 /\!/ EF$，所以 $B_2C_2 /\!/ A_2D_2$.



证法 2　以$\{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}\}$为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A_2(2,2,1)$，$C_2(0,0,3)$，$D_2(2,0,2)$，$B_2(0,2,2)$，则 $\overrightarrow{B_2C_2}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$，所以 $\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{A_2D_2}$，所以 $B_2C_2 /\!/ A_2D_2$.

(2)**解法 1**　设 $P(0,2,m)$，$0\leqslant m\leqslant 4$，则 $\overrightarrow{C_2A_2}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{C_2D_2}=(2,0,-1)$，$\overrightarrow{C_2P}=(0,2,m-3)$. 设平面 $A_2C_2D_2$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_2A_2}=2x+2y-2z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_2D_2}=2x-z=0,\end{cases}$令 $x=1$，则 $z=2$，$y=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,1,2)$. 设平面 A_2C_2P 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_2A_2}=2a+2b-2c=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_2P}=2b+(m-3)c=0,\end{cases}$令 $b=m-3$，则 $c=-2$，$a=1-m$，所以 $\boldsymbol{n}=(1-m,m-3,-2)$. 因为二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$，所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\left|\frac{6}{\sqrt{6}\times\sqrt{(1-m)^2+(m-3)^2+4}}\right|=|\cos 150°|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，[1]整理得 $m^2-4m+3=0$，解得 $m=1$ 或 $m=3$，则 $B_2P=|m-2|=1$.

解法 2　如图，在平面 ABB_1A_1 上取一点 G，使 $C_2G=A_2G$，连接 B_2D_2，C_2A_2 交于点 O，连接 OG，GB_2，直线 A_2G 交棱 BB_1 于点 P. 设点 G 到 AA_1 的距离为 x，点 G 到 AB 的距离为 y，则$(x-2)^2+(y-3)^2+4=x^2+(y-1)^2$，即 $x+y=4$.



由题设可知四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 为正方形，所以 $D_2O\perp A_2C_2$，且 O 为 A_2C_2 中点，又因为 $GA_2=C_2G$，所以 $GO\perp A_2C_2$，所以易知$\angle GOB_2$为二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 的平面角的补角. 在$\triangle GOB_2$ 中，$GB_2^2=OG^2+OB_2^2-2OG\cdot OB_2\cdot\cos\angle GOB_2$，所以$(x-2)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y-2)^2+1+2-2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+1}$，即$(2x-3)(x-3)=0$，解得$\begin{cases}x=3,\\ y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\ y=\frac{5}{2}.\end{cases}$在平面 ABB_1A_1 中，易知有$\frac{BP-1}{2}=\frac{y-1}{x}$，所以 BP 为 3 或 1，即 $B_2P=1$. 综上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$时，$B_2P=1$.

规范书写【1】注意不能丢掉绝对值.

解后反思　本题第(1)问证明，证法一，运用了综合法，通过构造平行四边形得到对边平行，再根据平行公理证得结论，需要注意推理的严密性，做到有理有据；而证法二，根据正四棱柱，不难建立空间直角坐标系，证明两条线所在的方向向量共线，证法简洁.

19. (1)**解**：$f'(x)=a\mathrm{e}^x-1$.

【启发式分析】由于 $\mathrm{e}^x>0$，则 $f'(x)=a\mathrm{e}^x-1=0$ 解的情形，取决于 a 的正负，故需要对 a 分类讨论.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=\ln\frac{1}{a}$，当 $x\in\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x\in\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

(2)**【启发式分析】**由(1)易得 $f(x)_{\min}=a^2+\ln a+1$，因此只要证明 $a^2+\ln a+1>2\ln a+\frac{3}{2}$ 即可，自然想到作差后构造函数，转化为研究函数的单调性以及最值.

证法 1　当 $a>0$ 时，由(1)知，$f(x)_{\min}=f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=a\left(\frac{1}{a}+a\right)-\ln\frac{1}{a}=a^2+\ln a+1$. 令 $g(a)=a^2+\ln a+1-\left(2\ln a+\frac{3}{2}\right)=a^2-\ln a-\frac{1}{2}$，则 $g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}$. 则当 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$g'(a)<0$，$g(a)$单调递减；当 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$g'(a)>0$，$g(a)$单调递增. 则 $g(a)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，故 $g(a)>0$ 在 $a>0$ 时恒成立，所以 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

证法 2 当 $a>0$ 时,由(1)知,当 $x=-\ln a$ 时,$f(x)$取得最小值,所以 $f(x)\geqslant f(-\ln a)=a^2+\ln a+1$. 从而 $f(x)-\left(2\ln a+\frac{3}{2}\right)\geqslant a^2-\ln a-\frac{1}{2}$. 设 $g(x)=\ln x-x+1(x>0)$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$. 当 $0<x<1$ 时,$g'(x)>0$;当 $x>1$ 时,$g'(x)<0$. 所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减. 故当 $x>0$ 时,$g(x)\leqslant g(1)=0$,即 $\ln x\leqslant x-1$. 故当 $a>0$ 时,$a^2-\ln a-\frac{1}{2}\geqslant a^2-(a-1)-\frac{1}{2}=a^2-a+\frac{1}{2}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0$. 从而 $f(x)-\left(2\ln a+\frac{3}{2}\right)>0$, 即 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

证法 3 当 $a>0$ 时,由(1)知,当 $x=-\ln a$ 时,$f(x)$取得最小值,所以 $f(x)\geqslant f(-\ln a)=a^2+\ln a+1$. 从而 $f(x)-\left(2\ln a+\frac{3}{2}\right)\geqslant a^2-\ln a-\frac{1}{2}$. 同证法 2 可得,当 $x>0$ 时,$\ln x\leqslant x-1$, 即 $x\geqslant\ln x+1$. 故当 $a>0$ 时,$a^2-\ln a-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}a^2-\ln a-\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}(\ln a^2+1)-\ln a-\frac{1}{2}=0$. 从而 $f(x)-\left(2\ln a+\frac{3}{2}\right)>0$, 即 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

解后反思 待证不等式的两边含有同一个变量时,一般地,可以直接构造"左减右"的函数,有时对复杂的式子要进行变形,利用导数研究其单调性和最值,借助所构造函数的单调性和最值即可得证. 而若直接求导比较复杂或无从下手时,可将待证式进行变形,构造两个函数,从而找到可以传递的中间量,达到证明的目标.

20. 解:(1)由 $3a_2=3a_1+a_3$,得 $3d=a_3=a_1+2d$,所以 $a_1=d$,所以 $a_n=a_1+(n-1)d=nd$,则 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}=\frac{n+1}{d}$, 则 $S_3+T_3=d+2d+3d+\frac{2}{d}+\frac{3}{d}+\frac{4}{d}=21$,整理得 $2d^2-7d+3=0$,解得 $d=3$ 或 $d=\frac{1}{2}$(不满足 $d>1$,舍去),所以 $a_n=3n$.

(2)**解法 1(基本量法)** 【**启发式分析**】一个数列成等差数列,往往取前三项成等差数列,通过等差中项建立方程,得到基本量——首项 a_1 和公差 d 之间的关系式.

因为$\{b_n\}$为等差数列,所以 $2b_2=b_1+b_3$,所以$\frac{12}{a_2}=\frac{2}{a_1}+\frac{12}{a_3}$,即 $6\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)=\frac{1}{a_1}$,则 $6\cdot\frac{d}{(a_1+d)(a_1+2d)}=\frac{1}{a_1}$,整理得 $a_1^2-3a_1d+2d^2=0$,所以 $a_1=d$ 或 $a_1=2d$.

【**启发式分析**】分类讨论,可以用 d 表示出$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式,通过等差数列的求和公式,建立 d 的方程,不难求得 d 的值.

当 $a_1=d$ 时,$a_n=a_1+(n-1)d=nd$,$b_n=\frac{n^2+n}{a_n}=\frac{n+1}{d}$,则 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{d}$,$\{b_n\}$为等差数列,满足题意. 则 $S_{99}-T_{99}=\frac{99d\cdot(1+99)}{2}-\frac{99\times(2+100)}{2d}=99$,则 $50d^2-d-51=0$,解得 $d=\frac{51}{50}$或-1(舍去).

当 $a_1=2d$ 时,$a_n=a_1+(n-1)d=(n+1)d$,$b_n=\frac{n^2+n}{a_n}=\frac{n}{d}$,则 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{d}$,$\{b_n\}$为等差数列,满足题意. 所以 $S_{99}-T_{99}=\frac{99d\cdot(2+100)}{2}-\frac{99\times(1+99)}{2d}=99$,则 $51d^2-d-50=0$,解得 $d=-\frac{50}{51}$或 1,都不成立,故 $d=\frac{51}{50}$.

解法 2(方程法) 【**启发式分析**】可以根据$\{b_n\}$为等差数列,设 $b_n=kn+b(k,b$ 为常数),根据 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$,转化为关于 n 的二次方程恒成立,进而根据系数相等,得到首项 a_1 和公差 d 之间的关系式.

因为$\{b_n\}$为等差数列,设 $b_n=kn+b(k,b$ 为常数),则由 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$ 得 $n^2+n=(kn+b)[a_1+(n-1)d]$对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,则 $n^2+n=kdn^2+(ka_1-kd+bd)n+b(a_1-d)$对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,所以$\begin{cases}kd=1,\\ka_1-kd+bd=1,\\b(a_1-d)=0,\end{cases}$则 $b=0$ 或 $a_1=d$. 当 $b=0$ 时,$ka_1=2$,$a_1\cdot\frac{1}{d}=2$,则 $a_1=2d$.(以下同解法 1)

21. 解:(1)记"第 2 次投篮的人是乙"为事件 A,记"第 1 次投篮的人是甲,但他未投中"为事件 A_1,记"第 1 次投篮的人是乙,但他投中了"为事件 A_2,则 $A=A_1+A_2$,且事件 A_1,A_2 互斥. 因为 $P(A_1)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$,$P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$,所以 $P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$,故第 2 次投篮的人是乙的概率为$\frac{3}{5}$.

(2)设第 i 次投篮的人是甲的概率为 $p_i(i\in\mathbf{N}^*)$,则第 i 次投篮的人是乙的概率为 $1-p_i$,且 $p_1=\frac{1}{2}$."第 i 次投篮的人是甲"这一事件对应于两个事件的和事件,即事件"第 $i-1$ 次投篮的人是甲,且他投中"与事件"第 $i-1$ 次投篮的人是乙,且他未投中"的和. 因为这两个事件是互斥的,所以 $p_i=\frac{3}{5}p_{i-1}+\left(1-\frac{4}{5}\right)(1-p_{i-1})=\frac{2}{5}p_{i-1}+\frac{1}{5}$,即 $p_i-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(p_{i-1}-\frac{1}{3}\right)$. 因为 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\neq0$,所以$\left\{p_i-\frac{1}{3}\right\}$是以$\frac{1}{6}$为首项,$\frac{2}{5}$为公比的等比数列,所以 $p_i-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$,即 $p_i=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$,故第 i 次投篮的人是甲的概率为$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$.

(3)用 $X_i=1$ 表示第 i 次是甲投篮,$X_i=0$ 表示第 i 次不是甲投篮,则 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}=p_i$, 所以

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}p_i=\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}=\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}=\frac{n}{3}+\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right].$$

解后反思 1. 本题将概率分布列与数列知识相结合进行综合考查,体现了交汇命题的特点,同时也是高考命题的热点,这类问题值得关注.

2. 研究此类数列问题的关键在于构造数列的递推关系式,这是解决问题的本质所在.

3. 本题的第(3)问难点在于根据题意构造出两点分布，从而利用题目所给出的结论进行求解.

22. 解：(1)设点 $P(x,y)$. 则由题意得 $|y|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}$，化简得 $y=x^2+\frac{1}{4}$，即为 W 的方程.

(2)**【启发式分析】**注意到矩形 $ABCD$ 的周长只与相邻的两边的长的和有关，因此只需研究相邻两边之和.

证法 1(设线法) 不妨设 A,B,D 三点在 W 上，且 $AB\perp AD$，设 $A\left(a,a^2+\frac{1}{4}\right)$，则 AB：$y-a^2-\frac{1}{4}=k(x-a)$. 由 $\begin{cases} y-a^2-\frac{1}{4}=k(x-a), \\ y=x^2+\frac{1}{4}, \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-a^2=k(x-a)$，所以 $x=a$ 或 $x=k-a$，故 $|AB|=|k-2a|\sqrt{1+k^2}$. 同理，得 $|AD|=\left|-\frac{1}{k}-2a\right|\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=\left|\frac{1}{k}+2a\right|\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$，故 $|AB|+|AD|=|k-2a|\cdot\sqrt{1+k^2}+\left|\frac{1}{k}+2a\right|\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$.

【启发式分析】注意到上式中含有两个变量 a,k，根据对称性，可以猜测，当矩形的其中一个顶点为抛物线的顶点时，其周长处于“最小状态”，因此通过放缩法来消去变量 a.

若 $|k|\leqslant1$，则 $|AB|+|AD|=|k-2a|\sqrt{1+k^2}+\left|\frac{1}{k}+2a\right|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=|k-2a|\sqrt{1+k^2}+\frac{\sqrt{1+k^2}}{|k|}\left|\frac{1}{k}+2a\right|\geqslant\sqrt{1+k^2}\left(|k-2a|+\left|\frac{1}{k}+2a\right|\right)\geqslant\sqrt{1+k^2}\cdot\left|k+\frac{1}{k}\right|=\sqrt{\frac{(1+k^2)^3}{k^2}}$. 令 $t=k^2$，则 $f(t)=\frac{(1+k^2)^3}{k^2}=\frac{(t+1)^3}{t}$ $(0<t\leqslant1)$，从而 $f'(t)=\frac{2t^3+3t^2-1}{t^2}=\frac{(t+1)^2(2t-1)}{t^2}$. 当 $t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f'(t)<0$，此时 $f(t)$ 单调递减；当 $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$f'(t)>0$，此时 $f(t)$ 单调递增. 故 $f(t)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{4}$，此时 $|AB|+|AD|\geqslant\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $k^2=\frac{1}{2}$ 时，取等号. 由于 $|k-2a|\sqrt{1+k^2}+\frac{\sqrt{1+k^2}}{|k|}\left|\frac{1}{k}+2a\right|\geqslant\sqrt{1+k^2}\cdot\left(|k-2a|+\left|\frac{1}{k}+2a\right|\right)$，当且仅当 $|k|=1$ 时，等号成立，故 $|AB|+|AD|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$，此时矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

【启发式分析】根据代数式的对称性，将 $|k|>1$ 时的情形，通过换元，转化为 $|k|\leqslant1$ 的情形来处理.

当 $|k|>1$ 时，令 $u=\frac{1}{k}$，则 $|u|<1$，此时 $|AB|+|AD|=|k-2a|\cdot\sqrt{1+k^2}+\left|\frac{1}{k}+2a\right|\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=\left|\frac{1}{u}-2a\right|\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}+\sqrt{1+u^2}\cdot|u+2a|>\sqrt{1+u^2}\left(\left|\frac{1}{u}-2a\right|+|u+2a|\right)\geqslant\sqrt{1+u^2}\cdot\left|u+\frac{1}{u}\right|=\sqrt{\frac{(1+u^2)^3}{u^2}}$，同理可得 $|AB|+|AD|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$，此时矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$. 综上，矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

证法 2(设点法) 不妨设点 A,B,D 三点在 W 上，且 $AB\perp AD$. 设 $A\left(a,a^2+\frac{1}{4}\right)$，$B\left(b,b^2+\frac{1}{4}\right)$，$D\left(c,c^2+\frac{1}{4}\right)$，则 $\overrightarrow{AB}=(b-a,b^2-a^2)$，$\overrightarrow{AD}=(c-a,c^2-a^2)$. 由题意得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，即 $(b-a)(c-a)+(b^2-a^2)(c^2-a^2)=0$，显然 $(b-a)(c-a)\neq0$，所以 $1+(b+a)(c+a)=0$，所以 $b=-a-\frac{1}{a+c}$，且 $|a+b|\cdot|a+c|=1$，所以 $\min\{|a+b|,|a+c|\}\leqslant1$，不妨设 $|a+c|\leqslant1$. 故 $|AB|+|AD|=|b-a|\sqrt{1+(a+b)^2}+|c-a|\sqrt{1+(c+a)^2}=|b-a|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{(a+c)^2}}+|c-a|\sqrt{1+(c+a)^2}\geqslant|b-a|\sqrt{1+(c+a)^2}+|c-a|\cdot\sqrt{1+(c+a)^2}\geqslant|c-b|\sqrt{1+(c+a)^2}=\left|a+c+\frac{1}{a+c}\right|\cdot\sqrt{1+(a+c)^2}$，此时，当 $|a+c|=1$ 时取等号. 令 $t=|a+c|$，则 $f(t)=\left(t+\frac{1}{t}\right)\sqrt{1+t^2}=\frac{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{t}$ $(t\in(0,1])$，故 $f'(t)=\frac{\frac{3}{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot2t^2-(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{t^2}=\frac{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}(2t^2-1)}{t^2}$. 当 $t\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$f'(t)<0$，此时 $f(t)$ 单调递减，当 $t\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ 时，$f'(t)>0$，此时 $f(t)$ 单调递增，故 $f(t)_{\min}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，此时 $|AB|+|AD|\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号. 注意到两个取等号的条件分别为 $|a+c|=1$，$|a+c|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故等号不能同时取到，[1]所以等号不成立，故矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

规范书写 【1】不能忽略对取等条件的排除.

解后反思 1. 研究直线与圆锥曲线的位置关系问题的基本方法是通过直线的方程以及圆锥曲线的方程联立成方程组，从而将交点转化为直线的特征量加以表示，此种方法称为设线法. 还有一种方法就是直接设交点的坐标代入圆锥曲线的方程来处理，此种方法称为设点法，设点法多用于圆锥曲线为抛物线时，因为此时设点只需要一个未知量即可.

2. 本题的难点在于将 $|AB|+|AD|$ 的表达式放缩为只含有一个变元的函数式，这个思维的起点来源于图形的对称性.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅱ

1. A $(1+3i)(3-i)=6+8i$，对应的点为 $(6,8)$ 在第一象限.

2. B 因为 $A\subseteq B$，所以 $a-2=0$ 或 $2a-2=0$，即 $a=2$ 或 $a=1$. 当 $a=2$ 时，$A=\{0,-2\}$，$B=\{1,0,2\}$，不满足 $A\subseteq B$；当 $a=1$ 时，$A=\{0,-1\}$，$B=\{1,-1,0\}$，满足 $A\subseteq B$，所以 $a=1$.

易错警示 利用必要条件解题，一定要检验，否则容易产生增根.

3. D 按照分层抽样的规则，则应在 400 名初中生中抽取 40 名，200 名高中生抽取 20 名，则不同的抽样结果共有 $C_{400}^{40}\cdot C_{200}^{20}$ 种.

4. B $f(x)=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$，$f(-x)=(-x+a)\ln\frac{-2x-1}{-2x+1}=(-x+a)\ln\frac{2x+1}{2x-1}=(-x+a)\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-1}=(x-a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$. 因为 $f(-x)=f(x)$，所以 $x-a=x+a$，即 $a=0$.

5. C　直线 $y=x+m$ 方程可化为 $x-y+m=0$，$F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，依题意，$\frac{|-\sqrt{2}-0+m|}{\sqrt{2}}=2\cdot\frac{|\sqrt{2}-0+m|}{\sqrt{2}}$，解得 $m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ 或 $m=-3\sqrt{2}$（舍去）.

易错警示　当 $m=-3\sqrt{2}$ 时，直线 $y=x-3\sqrt{2}$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 相离.

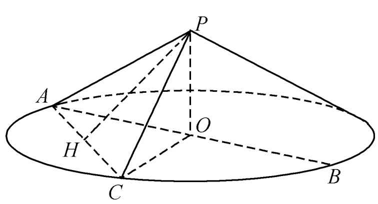
6. C　因为 $f(x)$ 在区间(1,2)上单调递增，所以 $f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}\geqslant 0$ 在(1,2)上恒成立，即 $0<\frac{1}{a}\leqslant xe^x$ 在(1,2)上恒成立. 设 $g(x)=xe^x(1<x<2)$，因为 $g'(x)=(x+1)e^x>0$，所以 $g(x)$ 在(1,2)上单调递增，所以 $g(1)<g(x)<g(2)$，即 $e<g(x)<2e^2$，所以 $0<\frac{1}{a}\leqslant e$，即 $a\geqslant\frac{1}{e}$. 所以 a 的最小值为 e^{-1}.

7. D　因为 $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，所以 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{8}=\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$. 因为 α 为锐角，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 也为锐角. 所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

8. C　**解法 1（基本量法）**　依题意知，公比 $q\neq\pm1$. 由 $\begin{cases}S_4=-5,\\S_6=21S_2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=-5,\\\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=21\cdot\frac{a_1(1-q^2)}{1-q},\end{cases}$ 解得 $q^2=4$，$\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{3}$. 所以 $S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{1-2^8}{3}=-85$.

解法 2（性质法）　因为 $S_2,S_4-S_2,S_6-S_4,S_8-S_6$ 成等比数列，所以 $(S_4-S_2)^2=S_2\cdot(S_6-S_4)$，即 $(-5-S_2)^2=S_2\cdot(21S_2+5)$，解得 $S_2=-1$ 或 $S_2=\frac{5}{4}$. 当 $S_2=-1$ 时，由 $(S_6-S_4)^2=(S_4-S_2)\cdot(S_8-S_6)$，求得 $S_8=-85$；当 $S_2=\frac{5}{4}$ 时，结合 $S_4=-5$，求得 $q^2=-5<0$，舍去.

9. AC　如图，因为 $l=PA=2$，$\angle APB=120°$，所以 $\angle APO=\frac{1}{2}\angle APB=60°$. 所以 $h=PO=PA\cos 60°=1$，$r=OA=OB=PA\cdot\sin 60°=\sqrt{3}$. 对于选项 A，$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\pi$，A 正确；对于选项 B，侧面积 $S=\pi rl=2\sqrt{3}\pi$，B 错误；对于选项 C，取 AC 的中点 H，因为 $PA=PC=l=2$，$OA=OC=r=\sqrt{3}$，所以 $PH\perp AC$，$OH\perp AC$，所以 $\angle PHO$ 为二面角 P-AC-O 的平面角，所以 $\angle PHO=45°$，所以 $OH=PO=1$，$PH=\sqrt{2}PO=\sqrt{2}$，所以 $AC=2\sqrt{OA^2-OH^2}=2\sqrt{2}$，C 正确；对于选项 D，$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}AC\cdot PH=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，D 错误.



10. AC　因为直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 与 x 轴的交点为(1,0)，所以抛物线的焦点为 $F(1,0)$，准线 $l:x=-1$. 对于选项 A，$\frac{p}{2}=1$，$p=2$，A 正确；对于选项 B，由 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=-\sqrt{3}(x-1),\end{cases}$ 消去 y，得 $3x^2-10x+3=0$，则 $x_M+x_N=\frac{10}{3}$，由抛物线的定义，得 $|MN|=|MF|+|NF|=\frac{p}{2}+x_M+\frac{p}{2}+x_N=p+x_M+x_N=2+\frac{10}{3}=\frac{16}{3}$，B 错误；对于选项 C，设 MN 的中点为 C，点 M,N,C 在准线上的射影分别为 M',N',C'，由梯形的中位线的性质知 $|CC'|=\frac{1}{2}(|MM'|+|NN'|)=\frac{1}{2}(|MF|+|NF|)=\frac{1}{2}|MN|$，即以 MN 为直径的圆的圆心 C 到准线的距离等于直径的一半，所以该圆与准线 l 相切，C 正确；对于选项 D，由 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=-\sqrt{3}(x-1)\end{cases}$ 消去 y，得 $3x^2-10x+3=0$，求得 $M\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$N(3,-2\sqrt{3})$，进而求得 $|OM|=\frac{\sqrt{13}}{3}$，$|ON|=\sqrt{21}$，$|MN|=\frac{16}{3}$，D 错误.

11. BCD　函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}(a\neq0)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}=\frac{ax^2-bx-2c}{x^3}$，令 $f'(x)=0$，即方程 $ax^2-bx-2c=0(a\neq0)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有相异实根，所以有 $\begin{cases}a\neq0,\\\Delta=b^2+8ac>0,\\x_1+x_2=\frac{b}{a}>0,\\x_1\cdot x_2=\frac{-2c}{a}>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\neq0,\\b^2+8ac>0,\\ab>0,\\ac<0,\end{cases}$ 由此可得 $bc<0$.

12. ABD　**【启发式分析】**读懂题意，了解规则，用简单事件的概率求复杂事件的概率.

对于选项 A，发 1 收 1 的概率为 $1-\beta$，发 0 收 0 的概率为 $1-\alpha$，发 1 收 1 概率的为 $1-\beta$，所以概率 $P=(1-\beta)(1-\alpha)(1-\beta)=(1-\alpha)(1-\beta)^2$，A 正确；对于选项 B，发 1 收 1 的概率为 $1-\beta$，发 1 收 0 的概率为 β，发 1 收 1 的概率为 $1-\beta$，所以概率 $P=(1-\beta)\beta(1-\beta)=\beta(1-\beta)^2$，B 正确；对于选项 C，采用三次传输方案，发送 1，译码为 1，说明依次收到的为 1，1，1；0，1，1；1，0，1；1，1，0，所以概率为 $P=(1-\beta)(1-\beta)(1-\beta)+\beta(1-\beta)(1-\beta)+(1-\beta)\beta(1-\beta)+(1-\beta)(1-\beta)\beta$，即 $P=(1-\beta)^3+3\beta(1-\beta)^2$，C 错误；对于选项 D，根据 C 可知，采用三次传输方案，发送 0，译码为 0 的概率 $P_1=(1-\alpha)^3+3\alpha(1-\alpha)^2$，单次传输方案，发送 0，译码为 0 的概率 $P_2=1-\alpha$，$P_1-P_2=(1-\alpha)^3+3\alpha(1-\alpha)^2-(1-\alpha)=\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha)$，因为 $0<\alpha<0.5$，所以 $P_1-P_2=\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha)>0$，D 正确.

13. $\sqrt{3}$　$\begin{cases}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3},\\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|,\end{cases}$ 平方并整理，得 $\begin{cases}\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3,\\\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\end{cases}$ 所以 $\boldsymbol{b}^2=3$，即 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

14. 28　依题意，可知截面为中截面，所以台体的高为 3.

解法 1(直接法)　台体的体积 $V=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})h=\frac{1}{3}\times(2^2+4^2+2\times4)\times3=28$.

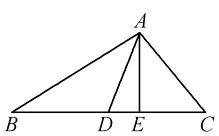
解法 2(割补法)　台体的体积 $V=V_{大锥}-V_{小锥}=\frac{1}{3}\times4^2\times6-\frac{1}{3}\times2^2\times3=28$.

15. 2(答案不唯一)　设圆心角$\angle ACB=2\alpha$,则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha=\frac{8}{5}$,求得 $\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$,所以 $\cos 2\alpha=\pm\frac{3}{5}$,$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\pm\frac{3}{5}$,求得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$或 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以圆心到直线的距离 $d=r\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$或$\frac{4\sqrt{5}}{5}$,又 $d=\frac{|1-m\cdot0+1|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}$,由$\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$或$\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,解得 $m=\pm2$ 或 $m=\pm\frac{1}{2}$,填其中任意一个即可.

16. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　对照图形有 $\omega x_A+\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\omega x_B+\varphi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,两式相减,得 $\omega(x_B-x_A)=\frac{2\pi}{3}$,即$\frac{\pi}{6}\omega=\frac{2\pi}{3}$,求得 $\omega=4$,所以 $f(x)=\sin(4x+\varphi)$. 又图象过点$\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$,所以 $4\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\varphi=2k\pi-\frac{8\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,所以 $f(x)=\sin\left(4x+2k\pi-\frac{8\pi}{3}\right)$,即 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$,所以 $f(\pi)=\sin\left(4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

易错警示　$\frac{2\pi}{3}$为三角函数的上升零点,所以应有 $4\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,而不是 $4\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,否则问题就复杂并且错了.

17. 解:(1)过点 A 作 $AE\perp BC$,垂足为 E,如图,设$\triangle ABC$ 边 BC 上的高为 h.



因为 $AD=1$,$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$,所以 $h=AE=AD\sin\angle ADC=1\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a=\sqrt{3}$. 所以 $a=4$. 因为 D 为 BC 的中点,所以 $BD=\frac{1}{2}a=2$,$DE=AD\cdot\cos\angle ADC=1\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

解法 1　$\tan B=\frac{AE}{BD+DE}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

解法 2　在$\triangle ABD$ 中,因为 D 为 BC 的中点,所以 $BD=\frac{1}{2}a=2$,$AD=1$,$\angle ADB=\pi-\angle ADC=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$. 由余弦定理知 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB=1^2+2^2-2\times1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$,即 $AB=\sqrt{7}$,所以 $\cos B=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\frac{7+4-1}{2\sqrt{7}\times2}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. 所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\sqrt{1-\frac{25}{28}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$,所以 $\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

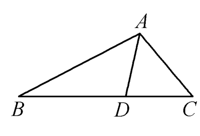
解法 3　在$\triangle ABD$ 中,由正弦定理得$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)}$,即$\frac{1}{\sin B}=\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)}$,即 $2\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)$,整理得$\frac{5}{2}\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B$,所以 $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

(2)**解法 1**　因为 D 为 BC 的中点,所以 $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,平方得 $4\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,即 $b^2+c^2+2bc\cos\angle BAC=4$. 因为 $b^2+c^2=8$,所以 $\cos\angle BAC=-\frac{2}{bc}$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\angle BAC=\sqrt{3}$,所以 $\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{3}}{bc}$. 因为 $\sin^2\angle BAC+\cos^2\angle BAC=1$,所以$\frac{12}{(bc)^2}+\frac{4}{(bc)^2}=1$,即 $bc=4$. 由$\begin{cases}bc=4,\\b^2+c^2=8,\end{cases}$解得 $b=c=2$.

解法 2　因为$\angle ADB+\angle ADC=\pi$,所以 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$,所以$\frac{1+\frac{1}{4}a^2-c^2}{2\times\frac{1}{2}a\cdot1}+\frac{1+\frac{1}{4}a^2-b^2}{2\times\frac{1}{2}a\cdot1}=0$,即 $2+\frac{1}{2}a^2-(b^2+c^2)=0$.

因为 $b^2+c^2=8$,所以 $a^2=12$,所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8-12}{2bc}=-\frac{2}{bc}$. 又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC=\sqrt{3}$,所以 $\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{3}}{bc}$,则 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2\sqrt{3}}{bc}\cdot\frac{bc}{-2}=-\sqrt{3}$,所以$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$. 再由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC=\sqrt{3}$,得 $bc=4$,结合 $b^2+c^2=8$,解得 $b=c=2$.

解后反思　对于解三角形的静态问题,主要是针对要求的边和角,依据内角和定理、正、余弦定理列出相关的方程或方程组,解出所求的边和角. 对于“爪”图,我们还有以下思路:



思路 1:利用向量 $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}\left(m+n=1,\frac{BD}{DC}=\frac{n}{m}\right)$.

思路 2:利用面积 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ADC}$.

思路 3:利用有公共边的三角形具有 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$.

思路 4:利用解三角形(并列型)联立方程组.

18. (1)**解**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,$S_4=4a_1+\frac{4\times3}{2}d=4a_1+6d=32$,即 $2a_1+3d=16$,$T_3=b_1+b_2+b_3=(a_1-6)+2a_2+(a_3-6)=4a_1+4d-12=16$,即 $a_1+d=7$,由$\begin{cases}a_1+d=7,\\2a_1+3d=16,\end{cases}$解得 $a_1=5$,$d=2$,所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n+3(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)【启发式分析】就是要证明在 $n>5$ 时，$T_n-S_n>0$ 恒成立.

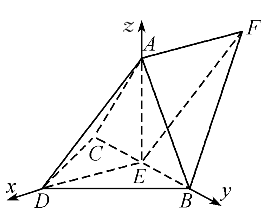
证明：①当 $n=2k$ 时，因为 $n>5$，所以 $k\geqslant3,k\in\mathbf{N}^*$，$T_n-S_n=(b_1-a_1)+(b_3-a_3)+\cdots+(b_{2k-1}-a_{2k-1})+(b_2-a_2)+(b_4-a_4)+\cdots+(b_{2k}-a_{2k})=-6k+(a_2+a_4+\cdots+a_{2k})=-6k+\frac{k(a_2+a_{2k})}{2}=-6k+\frac{k(7+4k+3)}{2}=2k^2-k=k(2k-1)>0$，即 $T_n>S_n$ 成立. ②当 $n=2k-1$ 时，因为 $n>5$，所以 $k\geqslant4,k\in\mathbf{N}^*$，$T_n-S_n=(b_1-a_1)+(b_3-a_3)+\cdots+(b_{2k-1}-a_{2k-1})+(b_2-a_2)+(b_4-a_4)+\cdots+(b_{2k-2}-a_{2k-2})=-6k+(a_2+a_4+\cdots+a_{2k-2})=-6k+\frac{(k-1)(a_2+a_{2k-2})}{2}=-6k+\frac{(k-1)(7+4k-4+3)}{2}=-6k+(k-1)(2k+3)=2k^2-5k-3=(2k+1)(k-3)>0$，即 $T_n>S_n$ 成立. 综上①②证得，当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

19.【启发式分析】设指标为 X，理解漏诊率 $p(c)=P(X\leqslant c)$，理解误诊率 $q(c)=P(X>c)$，在患病者的频率分布直方图中求漏诊率 $p(c)=P(X\leqslant c)$，在未患病者的频率分布直方图中求误诊率 $q(c)=P(X>c)$.

解：(1)设指标为 X，则 $p(c)=P(X\leqslant c)=0.005=0.5\%$，在患病者的频率分布直方图中，第一组的频率为 $(100-95)\times0.002=0.010>0.005=0.5\%$，所以 $c\in(95,100)$，因此 $p(c)=P(X\leqslant c)=(c-95)\times0.002=0.005$，解得 $c=97.5$. 在未患病者的频率分布直方图中，$q(c)=P(X>c)$，当 $c=97.5$ 时，$q(97.5)=P(X>97.5)=(100-97.5)\times0.010+(105-100)\times0.002=0.035$，所以临界值 $c=97.5$，误诊率 $q(97.5)=3.5\%$.

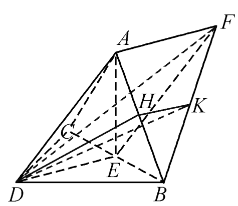
(2)①当 $c\in[95,100]$ 时，$p(c)=P(X\leqslant c)=(c-95)\times0.002=0.002c-0.19$，$q(c)=P(X>c)=(100-c)\times0.010+(105-100)\times0.002==-0.010c+1.01$，所以 $f(c)=p(c)+q(c)=-0.008c+0.82\geqslant-0.008\times100+0.82=0.02$. ②当 $c\in(100,105]$ 时，$p(c)=P(X\leqslant c)=(100-95)\times0.002+(c-100)\times0.012=0.012c-1.19$，$q(c)=P(X>c)=(105-c)\times0.002=-0.002c+0.21$，所以 $f(c)=p(c)+q(c)=0.01c-0.98>0.01\times100-0.98=0.02$. 综上①②可知，$f(c)=\begin{cases}-0.008c+0.82, & 95\leqslant c\leqslant100,\\ 0.01c-0.98, & 100<c\leqslant105.\end{cases}$ 因为 $f(c)$ 在区间 $[95,105]$ 上先减后增，所以当 $c=100$ 时，$f(c)$ 取得最小值，且最小值为 0.02.

20. (1)**证明**：如图，连接 AE,DE，设 $DA=DB=DC=2a$. 因为 $DB=DC=2a$，所以 $\triangle DBC$ 为等腰三角形. 因为 $DA=DB=DC=2a$，$\angle ADB=\angle ADC=60°$，所以 $\triangle ADB$，$\triangle ADC$ 为全等的正三角形，且边长为 $2a$. 所以 $AB=AC=2a$. 所以 $\triangle ABC$ 也为等腰三角形. 因为 E 为 BC 的中点，所以 $BC\perp AE,BC\perp DE$. 因为 $AE\cap DE=E$，$AE,DE\subset$ 平面 ADE，所以 $BC\perp$ 平面 ADE. 又 $DA\subset$ 平面 ADE，所以 $BC\perp DA$.[1]



(2)**解法 1** 因为 $DB=DC=2a,BD\perp CD$，所以 $BC=2\sqrt{2}a$，E 为 BC 的中点，所以 $DE=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}a$. 因为 $AB=AC=2a,BC=2\sqrt{2}a$，满足 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以 $AB\perp AC$，E 为 BC 的中点，所以 $AE=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}a$. 因为 $DE^2+AE^2=DA^2$，所以 $AE\perp DE$. 因为 ED,EB,EA 两两互相垂直，[2]所以以 $\{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA}\}$ 为基底，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $E(0,0,0)$，$A(0,0,\sqrt{2}a)$，$D(\sqrt{2}a,0,0)$，$B(0,\sqrt{2}a,0)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{2}a,-\sqrt{2}a)$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{2}a,0,\sqrt{2}a)$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=(0,0,-\sqrt{2}a)+(-\sqrt{2}a,0,\sqrt{2}a)=(-\sqrt{2}a,0,0)$. 设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}ay-\sqrt{2}az=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=-\sqrt{2}ax+\sqrt{2}az=0,\end{cases}$ 取 $x=1,y=1,z=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$. 设平面 ABF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}ay'-\sqrt{2}az'=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=-\sqrt{2}ax'=0,\end{cases}$ 取 $x'=0,y'=1,z'=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$. 设二面角 D-AB-F 的大小为 θ，则 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以二面角 D-AB-F 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解法 2(综合几何法) 同解法 1，$DE=\sqrt{2}a,BC=2\sqrt{2}a$. 又由 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，所以四边形 $DEFA$ 为平行四边形且 $FE=DA=2a$，所以由(1)可得 $BC\perp$ 平面 $ADEF$，故 $\angle BEF=90°$. 因此 $BF=\sqrt{BE^2+EF^2}=\sqrt{6}a$，所以有 $AB^2+AF^2=BF^2$，故 $AB\perp AF$. 由(1)可知 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{2}a=DE$，所以 $\triangle AED$ 为等腰直角三角形，其中 $\angle AED=90°$，易知在 $\square DEFA$ 中有 $\angle DEF=135°$. 作 AB 中点 H，BF 中点 K，连接 DH,KH. 因为三角形 DAB 为正三角形，所以 $DH\perp AB$. 又因为 HK 为 $\triangle BAF$ 的中位线且 $AF\perp AB$，所以 $HK\perp AB$，所以 $\angle KHD$ 为二面角 D-AB-F 的平面角. 连接 DF，由 $DE=\sqrt{2}a,EF=2a,\angle DEF=135°$ 可得 $DF^2=10a^2$，则 $DB^2+BF^2=DF^2$，所以 $\angle DBF=90°$. 连接 DK，$DK^2=DB^2+BK^2=\frac{11}{2}a^2$. 由 $DH=\sqrt{3}a,HK=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 可得 $\cos\angle DHK=\frac{DH^2+HK^2-DK^2}{2\times DH\times HK}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$. 因此二面角 D-AB-F 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



规范书写【1】使用线面垂直的判定定理，条件要写全.

【2】建系需先证明两两垂直，否则扣 1 分.

21. (1)**解**：因为双曲线 C 的中心为 O，左焦点为 $(-2\sqrt{5},0)$，所以其方程可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$. 由 $\begin{cases}c=2\sqrt{5},\\ e=\frac{c}{a}=\sqrt{5},\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b^2=c^2-a^2=20-4=16$. 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

(2)**证明**：$A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$，依题意直线 MN 的斜率可以不存在，但不为零，故设 MN 的直线方程为 $x=my-4$，[1]$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$. 联立 $\begin{cases}x=my-4,\\ 4x^2-y^2=16,\end{cases}$ 消去 x 并整理，得 $(4m^2-1)y^2-32my+$

$48=0$. 由根与系数的关系得 $y_1+y_2=\dfrac{32m}{4m^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{48}{4m^2-1}$，所以 $my_1y_2=\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$. 直线 MA_1 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 NA_2 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$. 联立 $\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\ y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2),\end{cases}$

【启发式分析】求交点 P 不是最终目的，最终目的是点 P 的轨迹，这里往往会卡住，如果题设中没有明确点 M 在第二象限，则还可以作出关于 x 轴对称的图形，因此会得到点 P 关于 x 轴对称的对称点 P'. 因此，可以预判点 P 所在的定直线一定是与 x 轴垂直的，所以点 P 的横坐标应该为定值，故应该先求交点 P 的横坐标，这里明确点 M 在第二象限是故意增设难度，当求出交点 P 的横坐标后，会遇到根与系数的关系的非对称性，这是第二个难点，需了解根与系数的关系非对称性的处理方法.

消去 y 得 $\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$.

解法 1 $\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{y_2}{y_1}\cdot\dfrac{x_1+2}{x_2-2}=\dfrac{y_2}{y_1}\cdot\dfrac{(my_1-4)+2}{(my_2-4)-2}=\dfrac{my_1y_2-2y_2}{my_1y_2-6y_1}=\dfrac{\dfrac{48m}{4m^2-1}-2y_2}{\dfrac{48m}{4m^2-1}-6y_1}=\dfrac{24m-(4m^2-1)y_2}{24m-3(4m^2-1)y_1}=\dfrac{24m-(4m^2-1)y_2}{24m-3(4m^2-1)\left(\dfrac{32m}{4m^2-1}-y_2\right)}=\dfrac{24m-(4m^2-1)y_2}{-72m+3(4m^2-1)y_2}=-\dfrac{1}{3}$.

解法 2 $\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{my_1y_2-2y_2}{my_1y_2-6y_1}=\dfrac{\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)-2y_2}{\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)-6y_1}=\dfrac{3y_1-y_2}{-9y_1+3y_2}=-\dfrac{1}{3}$.

解法 3 由 $my_1y_2=\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$，得 $\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{2m}{3}$，所以 $\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{my_1y_2-2y_2}{my_1y_2-6y_1}=\dfrac{m-\dfrac{2}{y_1}}{m-\dfrac{6}{y_2}}=\dfrac{m-2\left(\dfrac{2m}{3}-\dfrac{1}{y_2}\right)}{m-\dfrac{6}{y_2}}=\dfrac{-\dfrac{m}{3}+\dfrac{2}{y_2}}{m-\dfrac{6}{y_2}}=-\dfrac{1}{3}$.

即 $\dfrac{x+2}{x-2}=-\dfrac{1}{3}$，解得 $x=-1$，即直线 MA_1 与直线 NA_2 的交点 P 的横坐标为 -1，所以点 P 在定直线 $x=-1$ 上.

规范书写【1】注意说明直线 MN 的斜率可以不存在，但可以为零，否则扣 1 分.

解后反思 根与系数的关系非对称性的处理方法：

1. 能代则代，下标归一；
2. 两根积转化两根和；
3. 化为 $\dfrac{1}{x_1}$，$\dfrac{1}{x_2}$ 形式，运用 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-\dfrac{B}{C}$，下标归一.

22. (1)【启发式分析】通过作差，构造函数，运用导数工具求最值，达到证明的目的.

证明：①设 $\varphi(x)=x-\sin x(0<x<1)$. 因为 $\varphi'(x)=1-\cos x>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=0-\sin 0=0$，即 $\varphi(x)>0$，亦即 $\sin x<x$.

②设 $g(x)=x-x^2-\sin x(0<x<1)$，则 $g'(x)=1-2x-\cos x$，设 $h(x)=g'(x)=1-2x-\cos x$，则 $h'(x)=-2+\sin x=\sin x-2<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $h(x)<h(0)=1-2\times0-\cos 0=1-1=0$，即 $h(x)<0$，亦即 $g'(x)<0$. 所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减. 所以 $g(x)<g(0)=0-0^2-\sin 0=0$，即 $g(x)<0$，亦即 $x-x^2<\sin x$. 综上所述，当 $0<x<1$ 时，$x-x^2<\sin x<x$ 恒成立.

(2)**解法 1**

【启发式分析】若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，则存在 $\delta\in(0,1)$，使得当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时，$f(x)<f(0)=0$. 为了找到满足题意的 δ，要通过 $f(x)$ 的导函数的符号讨论 $f(x)$ 的单调性.

因为 $f(x)$ 是偶函数，不妨设 $0<x<1$，又因为 $\cos ax=\cos(-ax)$，不妨设 $a\geqslant0$. $f'(x)=\dfrac{2x-a(1-x^2)\sin ax}{1-x^2}$，$x\in(-1,1)$，分母 $1-x^2>0$，只需讨论分子 $2x-a(1-x^2)\sin ax$ 的符号. 令 $h(x)=2x-a(1-x^2)\sin ax$. 由(1)可知，当 $x>0$ 时，$\sin x<x$，于是 $h(x)\geqslant2x-a^2x(1-x^2)=x(2-a^2+a^2x^2)$，当 $x>0$ 时，$x-x^2<\sin x$，于是 $h(x)\leqslant2x-a^2x(1-x^2)(1-ax)$.

【启发式分析】如果找到 $\delta\in(0,1)$，使得当 $x\in(0,\delta)$ 时，$h(x)>0$，那么 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上单调递增，从而 $f(x)>f(0)$，那么 $x=0$ 就不是 $f(x)$ 的极大值点. 要使 $h(x)>0$，只需 $x(2-a^2+a^2x^2)>0$，又 $a^2x^2>0$，所以只需考虑 $2-a^2$ 的符号，于是找到了分类讨论的标准 $\sqrt{2}$.

当 $0\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ 时，$h(x)\geqslant x(2-a^2+a^2x^2)>0$. 当 $0<x<1$ 时，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增，从而 $f(x)>f(0)$，因此 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极大值点. 当 $a>\sqrt{2}$ 时，$h(x)<2x-a^2x(1-x^2)(1-ax)$，为了找到 $\delta\in(0,1)$，使得当 $x\in(0,\delta)$ 时，$h(x)<0$，只需 $2x-a^2x(1-x^2)(1-ax)<0$，即 $(1-x^2)(1-ax)>\dfrac{2}{a^2}$. 此不等式不容易解，继续进行不等式放缩：$(1-x^2)(1-ax)>(1-x)(1-ax)>(1-ax)^2$，只需 $(1-ax)^2>\dfrac{2}{a^2}$，解得 $1-ax>\dfrac{\sqrt{2}}{a}$，即 $0<x<\dfrac{a-\sqrt{2}}{a^2}$，易验证此时不等式放缩成立. 于是当 $0<x<\dfrac{a-\sqrt{2}}{a^2}$ 时，$h(x)<2x-a^2x(1-x^2)(1-ax)<x[2-a^2(1-ax)^2]<0$，从而 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a-\sqrt{2}}{a^2}\right)$ 上单调递减. 又因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 综上，a 的取值范围是 $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

解法 2 $f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$ 的定义域为 $(-1,1)$，$f(x)$ 为偶函数，$f'(x)=-a\sin ax+\dfrac{2x}{1-x^2}$ 为奇函数，令 $m(x)=f'(x)$，则 $m'(x)=-a^2\cos ax+\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ 为偶函数，令 $n(x)=m'(x)$，则 $n'(x)=a^3\sin ax+\dfrac{4x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$ 为奇函数.

【启发式分析】因为 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)=0$，若 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，则应存在一个小区间 $(0,\sigma)$，使得 $f'(x)<0$ 恒成立. 因为 $f'(0)=0$，所以在小区间 $(0,\sigma)$ 上 $f'(x)$ 应单调递减，从而在小区间 $(0,\sigma)$ 上，$m'(x)<0$. 由于在很小的区间 $(0,\sigma)$ 上，$n'(x)>0$，所以在很小的区间 $(0,\sigma)$ 上 $m'(x)$ 单调递增. 要在小区间 $(0,\sigma)$ 上，$m'(x)<0$，必须先满足 $m'(0)=-a^2+2<0$，即 $a<-\sqrt{2}$ 或 $a>\sqrt{2}$. 简言之，运用"端点效应"的方法，先寻求必要条件，再证明其充分性，下面的解法就是以证代求.

①当 $a=0$ 时，$f(x)=1-\ln(1-x^2)$，$f'(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$，易知 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点，不适合.

②当 $a>0$ 时，$f'(0)=0$，取 $\dfrac{\pi}{2a}$ 与 1 的较小者为 m. 当 $0<x<m$ 时，$\sin ax>0$，$a^3>0$，$\dfrac{4x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}>0$，从而有 $n'(x)>0$，所以 $m'(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递增，在 $(0,m)$ 上有 $m'(x)>m'(0)=-a^2+2$.

（Ⅰ）若 $-a^2+2\geqslant 0$，即 $0<a\leqslant\sqrt{2}$ 时，在 $(0,m)$ 上有 $m'(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递增，在 $(0,m)$ 上有 $f'(x)>f'(0)=0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递增. 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在 $(-m,0)$ 上单调递增. 因此 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点，不适合.[1]

（Ⅱ）若 $-a^2+2<0$，即 $a>\sqrt{2}$ 时，因为在 $(0,m)$ 上有 $n'(x)>0$，所以 $m'(x)$ 在 $(0,m)$ 上的单调递增. 因为 $m'(0)=-a^2+2<0$，所以存在 $n\in(0,m)$，使得当 $x\in(0,n)$，$m'(x)<0$ 恒成立. 因此 $f'(x)$ 在 $(0,n)$ 上单调递减，在 $(0,n)$ 上有 $f'(x)<f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,n)$ 上单调递减. 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在 $(-n,0)$ 上单调递增，因此 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，满足题意.

③当 $a<0$ 时，令 $t=-a>0$，则 $f'(x)=-a\sin ax+\dfrac{2x}{1-x^2}=t\sin(-tx)+\dfrac{2x}{1-x^2}$，即 $f'(x)=-t\sin tx+\dfrac{2x}{1-x^2}(t>0)$，转化到类似 $a>0$ 的情形. 由前面的所求可知，$t>\sqrt{2}$，即 $-a>\sqrt{2}$，亦即 $a<-\sqrt{2}$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

规范书写【1】当 $a>0$ 时，不仅要判断 $-a^2+2<0$ 满足条件，还要判断 $-a^2+2\geqslant 0$ 不满足条件.

解后反思 利用“端点效应”求得的必要条件，往往就是充要条件，对于选填题就没必要再证明了.

2022 年普通高等学校招生全国统一考试 · 新高考卷Ⅰ

1. D　$M=\{x\mid 0\leqslant x<16\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{1}{3}\right\}$，所以 $M\cap N=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{3}\leqslant x<16\right\}$.

2. D　$1-z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，则 $z=1+\mathrm{i}$，所以 $z+\bar{z}=1+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}=2$.

3. B　$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}=3(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})$，则 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.

4. C　棱台的高为 $157.5-148.5=9(\mathrm{m})$，则棱台的体积为 $\dfrac{1}{3}\times 9\times(140\times10^6+180\times10^6+\sqrt{140\times10^6\times180\times10^6})\approx1.437\times10^9(\mathrm{m}^3)$.

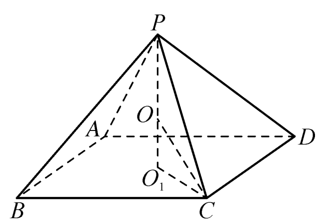
5. D　总的基本事件数为 $\mathrm{C}_7^2=21$（个），其中这 2 个数互质的基本事件有 (2,3)，(2,5)，(2,7)，(3,4)，(3,5)，(3,7)，(3,8)，(4,5)，(4,7)，(5,6)，(5,7)，(5,8)，(6,7)，(7,8)，共 14 个，$P=\dfrac{14}{21}=\dfrac{2}{3}$.

6. A　$b=2$，$\dfrac{3\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\omega=\dfrac{2k}{3}-\dfrac{1}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$. 又 $2<\omega=\dfrac{2\pi}{T}<3$，所以 $\omega=\dfrac{5}{2}$，所以 $f(x)=\sin\left(\dfrac{5}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)+2=1$.

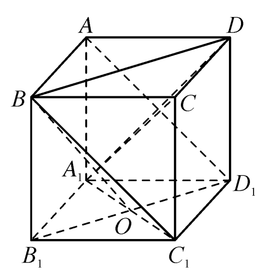
7. C　**【启发式分析】**观察结构，先凑出 0.1，则 $a=0.1\mathrm{e}^{0.1}$，$b=\dfrac{0.1}{1-0.1}$，$c=-\ln(1-0.1)$. 由此构造函数.

构造函数 $a(x)=x\mathrm{e}^x$，$b(x)=\dfrac{x}{1-x}$，$c(x)=-\ln(1-x)$，其中 $0\leqslant x<1$. $\dfrac{a(x)}{b(x)}=\mathrm{e}^x(1-x)$. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x(1-x)$，则当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=-x\mathrm{e}^x<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $\dfrac{a(0.1)}{b(0.1)}=f(0.1)<f(0)=1$，所以 $a<b$. $a(x)-c(x)=x\mathrm{e}^x+\ln(1-x)$. 设 $g(x)=x\mathrm{e}^x+\ln(1-x)$，则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{(1-x^2)\mathrm{e}^x-1}{1-x}$. 令 $h(x)=(1-x^2)\mathrm{e}^x-1$，则 $h'(x)=(-x^2-2x+1)\cdot\mathrm{e}^x$，当 $x\in(0,\sqrt{2}-1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，则 $h(x)>h(0)=0$，即 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增，则 $g(0.1)>g(0)=0$，故 $a>c$. 综上，$c<a<b$.

8. C　如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，设底面的中心为 O_1，外接球的球心为 O，$PO_1=h$，$O_1C=a$，设外接球的半径为 R，则有 $\dfrac{4}{3}\pi R^3=36\pi$，解得 $R=3$，所以 $OO_1=|h-3|$，则有 $(h-3)^2+a^2=9$，整理得 $a^2+h^2=6h$. 又 $a^2+h^2=l^2$，所以 $h=\dfrac{l^2}{6}$，则 $a^2=l^2-\dfrac{l^4}{36}$，故正四棱锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(2a)^2\times h=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{l^2}{6}\times\left(l^2-\dfrac{l^4}{36}\right)$，令 $t=\dfrac{l^2}{6}\in\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{2}\right]$，则 $V=\dfrac{2}{3}t(6t-t^2)=\dfrac{2}{3}(6t^2-t^3)$，则 $V'=\dfrac{2}{3}(12t-3t^2)$，令 $V'=0$，则 $t=4$，当 $t\in\left[\dfrac{3}{2},4\right]$ 时，$V'>0$，V 单调递增，当 $t\in\left[4,\dfrac{9}{2}\right]$ 时，$V'<0$，V 单调递减，当 $t=4$ 时，$V=\dfrac{64}{3}$，当 $t=\dfrac{3}{2}$ 时，$V=\dfrac{27}{4}$，当 $t=\dfrac{9}{2}$ 时，$V=\dfrac{81}{4}$. 综上，$V\in\left[\dfrac{27}{4},\dfrac{64}{3}\right]$.



9. ABD　对于 A，$BC_1/\!/AD_1$，而 $AD_1\perp DA_1$，所以 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90°，故 A 正确；对于 B，易得 $BC_1\perp$ 平面 A_1CD，而 $CA_1\subset$ 平面 A_1CD，所以 $BC_1\perp CA_1$，即 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°，故 B 正确；对于 C，连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 O，易证 $C_1O\perp$ 平面 BB_1D_1D，则 $\angle C_1BO$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角，而 $\sin\angle C_1BO=\dfrac{C_1O}{BC_1}=\dfrac{1}{2}$，则直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 30°，故 C 错误；对于 D，$\angle C_1BC=45^\circ$ 为 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，故 D 正确.



10. AC　因为 $f'(x)=3x^2-1$，所以当 $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt3}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt3}{3},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt3}{3}\right)$，$\left(\frac{\sqrt3}{3},+\infty\right)$ 上单调递增；当 $x\in\left(-\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3}\right)$ 上单调递减. 所以 $f(x)$ 有两个极值点，故 A 正确. 因为 $f\left(-\frac{\sqrt3}{3}\right)=1+\frac{2\sqrt3}{9}>0$，$f\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)=1-\frac{2\sqrt3}{9}>0$，所以 $f(x)$ 有且仅有一个零点，故 B 错误. 因为 $g(x)=x^3-x$ 为奇函数，它的图象关于 $(0,0)$ 对称，所以 $f(x)=g(x)+1$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，故 C 正确. 令 $f'(x)=2$，得 $x=\pm1$，从而得 $f(\pm1)=1$，由于点 $(\pm1,1)$ 不在直线 $y=2x$ 上，故 D 错误.

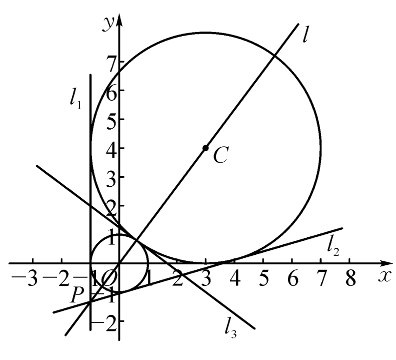
11. BCD　$1=2p$，故抛物线方程为 $x^2=y$，所以 C 的准线方程为 $y=-\frac14$，故 A 错误；将 $y=2x-1$ 与 $x^2=y$ 联立，消去 y 得 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，故直线 AB 与抛物线只有一个公共点，故它们相切，故 B 正确；设直线 PQ 的方程为 $y=kx-1$，将它与抛物线方程联立，消去 y 得 $x^2-kx+1=0$，设 $P(x_1,x_1^2)$，$Q(x_2,x_2^2)$，则 $x_1x_2=1$，$x_1+x_2=k$，且 $\Delta=k^2-4>0$，即 $k^2>4$，因为 $|OP|=\sqrt{x_1^2+x_1^4}=|x_1|\cdot\sqrt{x_1^2+1}$，$|OQ|=\sqrt{x_2^2+x_2^4}=|x_2|\sqrt{x_2^2+1}$，所以 $|OP|\cdot|OQ|=|x_1x_2|\sqrt{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\sqrt{(1+x_1^2)\left(1+\frac{1}{x_1^2}\right)}=\sqrt{2+x_1^2+\frac{1}{x_1^2}}\geqslant\sqrt4=2$（当且仅当 $x_1=\pm1$ 时等号成立），因为当 $x=\pm1$ 时，直线 PQ 与抛物线相切，故等号不成立，又 $|OA|=\sqrt2$，所以 $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$，故 C 正确；因为 $|BP|\cdot|BQ|=|x_1|\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot|x_2|\cdot\sqrt{1+k^2}=1+k^2>5$，$|BA|^2=5$，所以 $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$，故 D 正确.

12. BC　$f\left(\frac32-2x\right)=f\left(\frac32+2x\right)$，即 $f\left(\frac32+x\right)=f\left(\frac32-x\right)$，即 $f(3+x)=f(-x)$　①，因此，函数 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac32$ 对称，$f(-1)=f(4)$，C 正确. 因为 $g(x+2)=f'(x+2)$ 是偶函数，所以 $f(x+2)$ 关于 $(2,m)$ 对称，从而有 $f(4+x)+f(-x)=2m$　②，由①②得 $f(x+4)+f(x+3)=2m$，即 $f(x+1)+f(x)=2m$　③，进而有 $f(x+2)+f(x+1)=2m$　④，由③④得 $f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)$ 有一个周期为 2，又由②得 $f(2)+f(2)=2m$，即 $f(2)=m$，所以 $f(0)=f(2)=m$，故 A 错误. 因为 $f\left(\frac32-2x\right)$ 是偶函数，所以 $f'\left(\frac32-2x\right)$ 为奇函数，所以 $f'\left(\frac32-2x\right)=-f'\left(\frac32+2x\right)=-g\left(\frac32+2x\right)$，所以 $g\left(\frac32-2x\right)=-g\left(\frac32+2x\right)$，即 $g\left(\frac32-x\right)=-g\left(\frac32+x\right)$，即 $g(3+x)=-g(-x)$，而 $g(x+2)$ 为偶函数，所以 $g(2-x)=g(2+x)$，即 $g(-x)=g(4+x)$，从而 $g(x+4)=-g(x+3)$，即 $g(x+1)=-g(x)$，由此得 $g(x+2)=g(x)$，即 $g(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，由 $g\left(\frac32-x\right)=-g\left(\frac32+x\right)$ 得 $g\left(\frac32\right)=-g\left(\frac32\right)$，即 $g\left(\frac32\right)=0$，所以 $g\left(-\frac12\right)=g\left(\frac32\right)=0$，故 B 正确. 由 $g(3+x)=-g(-x)$ 得 $g(2)=-g(1)=-g(-1)$，故 D 错误.

13. -28　因为 $(x+y)^8$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^rx^{8-r}y^r$，而 $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8=(x+y)^8-\frac{y}{x}(x+y)^8$，所以 x^2y^6 的系数为 $C_8^6-C_8^5=-28$.

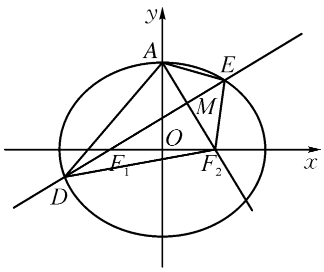
14. $x=-1$ 或 $y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$ 或 $y=-\frac34x+\frac54$　**解法 1**　当公切线的斜率不存在时，设切线为 $x=a$，则 $\begin{cases}1=|a|,\\4=|3-a|,\end{cases}$ 解得 $a=-1$，此时，公切线为 $x=-1$；当公切线的斜率存在时，设两圆的公切线方程为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=1,\\\frac{|3k-4+b|}{\sqrt{1+k^2}}=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{7}{24},\\b=-\frac{25}{24}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-\frac34,\\b=\frac54.\end{cases}$

解法 2　由图可知，两圆外切，且均与直线 $l_1:x=-1$ 相切. 另过两圆圆心的直线 l 的方程为 $y=\frac43x$，可得 l 与 l_1 的交点为 $P\left(-1,-\frac43\right)$. 由切线定理得，两圆另一公切线 l_2 过点 P，故可设 $l_2:y+\frac43=k(x+1)$，则原点到直线 l_2 的距离 $\frac{\left|k-\frac43\right|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\frac{7}{24}$，即 $l_2:y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$. 另由于两圆外切，因此在公切点处存在公切线 l_3 与 l 垂直，由两圆方程相减可得 $l_3:y=-\frac34x+\frac54$.



15. $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$　设切点为 $(m,(m+a)e^m)$，因为 $y'=e^x(x+a+1)$，所以切线的斜率为 $k=e^m(m+a+1)$，故切线方程为 $y-(m+a)e^m=e^m(m+a+1)(x-m)$. 因为切线过点 $(0,0)$，所以 $m^2+ma-a=0$　(*)，从而 $\Delta=a^2+4a>0$，解得 $a>0$ 或 $a<-4$.

16. 13　**解法 1**　如图，设 DE 与 AF_2 相交于点 M. 因为椭圆的离心率为 $\frac12$，所以 $\frac{c}{a}=\frac12$，即 $a=2c$，故 $b=\sqrt3c$. 因为 $k_{AF_2}=-\frac{b}{c}=-\sqrt3$，故 $\angle AF_2F_1=60^\circ$. 因为 $AF_2\perp DE$，所以 $|MF_2|=\frac12|F_1F_2|=c$，又 $|AF_2|=2c$，所以 DE 垂直平分线段 AF_2. 因此，$|AD|=|DF_2|$，$|AE|=|EF_2|$. 因此，$\triangle ADE$ 的周长即为 $\triangle DEF_2$ 的周长，且 $\triangle DEF_2$ 的周长等于 $4a$. 直线 DE 的方程为 $y=\frac{\sqrt3}{3}(x+c)$，将它与椭圆方程 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$ 联立并消去 y 得 $13x^2+8cx-32c^2=0$，所以 $x_D+x_E=-\frac{8c}{13}$，$x_Dx_E=-\frac{32c^2}{13}$，故 $|DE|=\sqrt{1+\frac13}\,|x_D-x_E|=\frac{48c}{13}=6$，解得 $c=\frac{13}{8}$，从而 $a=\frac{13}{4}$，故 $\triangle ADE$ 的周长为 13.



解法 2 因为椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，即 $a=2c$，故 $b=\sqrt{3}c$. 因为 $k_{AF_2}=-\frac{b}{c}=-\sqrt{3}$，所以 $k_{DE}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线 DE 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$，将它与椭圆方程 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$ 联立并消去 y 得 $13x^2+8cx-32c^2=0$　(*)，所以 $x_D+x_E=-\frac{8c}{13}$，$x_Dx_E=-\frac{32c^2}{13}$，故 $|DE|=\sqrt{1+\frac{1}{3}}\,|x_D-x_E|=\frac{48c}{13}=6$，解得 $c=\frac{13}{8}$，代入(*)得 $x=\frac{-1\pm3\sqrt{3}}{2}$，故 $D\left(\frac{-1-3\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}-12}{8}\right)$，$E\left(\frac{-1+3\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}+12}{8}\right)$，又 $A\left(0,\frac{13\sqrt{3}}{8}\right)$，从而 $|AD|+|AE|=7$，所以△ADE 的周长为 13.

解后反思 解法 1 利用了图形的特征——对称性，简化了运算，降低了难度；而解法 2 从代数的角度直接求解，运算量大，计算难、烦琐，尤其是在求 $|AD|+|AE|$ 时. 从两种方法的比较来看，提醒我们，在解决解析几何问题时，要有效地揭示图形的几何特征，并有效地加以应用，这样可以达到化繁为简，化难为易的作用.

17. (1)**解法 1** 因为 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列，所以 $\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，所以 $S_n=\frac{n+2}{3}a_n$　①，当 $n\geqslant2$ 时，[1] $S_{n-1}=\frac{n+1}{3}\cdot a_{n-1}$　②，①－②得 $a_n=\frac{n+2}{3}a_n-\frac{n+1}{3}a_{n-1}$，所以 $\frac{n-1}{3}a_n=\frac{n+1}{3}\cdot a_{n-1}$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}(n\geqslant2)$，所以 $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$.

解法 2 因为 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列，所以 $\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，所以 $S_n=\frac{n+2}{3}a_n$　①，当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=\frac{n+1}{3}a_{n-1}$　②，①－②得 $a_n=\frac{n+2}{3}\cdot a_n-\frac{n+1}{3}a_{n-1}$，所以 $\frac{n-1}{3}a_n=\frac{n+1}{3}a_{n-1}$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}(n\geqslant2)$，所以 $\frac{a_n}{(n+1)n}=\frac{a_{n-1}}{n(n-1)}$，故 $\left\{\frac{a_n}{n(n+1)}\right\}$ 为常数列，故 $\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$，即 $a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

(2)**证明**：因为 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}<2$.

规范书写【1】注意标明 $n\geqslant2$，否则扣 1 分.

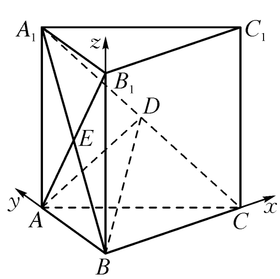
18. 解：(1)**解法 1** 因为 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\frac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\frac{\sin B}{\cos B}$，所以 $\sin B=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)$. 因为 $C=\frac{2\pi}{3}$，所以 $A+B=\frac{\pi}{3}$，所以 $\sin B=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. 又 $0<B<\frac{\pi}{3}$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

解法 2 因为 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$，所以 $\cos A+\cos A\cos 2B=\sin 2B+\sin A\sin 2B$，即 $\cos A-\sin 2B+\cos(A+2B)=0$. 因为 $C=\frac{2\pi}{3}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}-B$，代入上式得 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-B\right)-\sin 2B+\cos\left(\frac{\pi}{3}+B\right)=0$，即 $\cos B-2\cos B\sin B=0$. 因为 $0<B<\frac{\pi}{3}$，所以 $\cos B\neq0$，从而 $\sin B=\frac{1}{2}$，故 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2)由(1)知 $\sin B=\cos(A+B)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A-B\right)$，所以 $B=\frac{\pi}{2}-A-B$，即 $A=\frac{\pi}{2}-2B$，从而 $C=\pi-A-B=\frac{\pi}{2}+B$. 由 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，$0<C<\pi$ 得 $0<B<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2A+\sin^2B}{\sin^2C}=\frac{\cos^2 2B+\sin^2B}{\cos^2B}=\frac{(2\cos^2B-1)^2+1-\cos^2B}{\cos^2B}=4\cos^2B+\frac{2}{\cos^2B}-5\geqslant4\sqrt{2}-5$，当且仅当 $\cos^2B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立. 因为 $0<B<\frac{\pi}{4}$，所以 $\cos^2B\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，从而等号成立，故 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-5$.

19. 解：(1)设 A 到平面 A_1BC 的距离为 h. 因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，所以三棱锥 A_1-ABC 的体积为 $\frac{4}{3}$，所以 $V_{三棱锥A_1-ABC}=V_{三棱锥A-A_1BC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\frac{2\sqrt{2}}{3}h=\frac{4}{3}$，解得 $h=\sqrt{2}$，即 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.

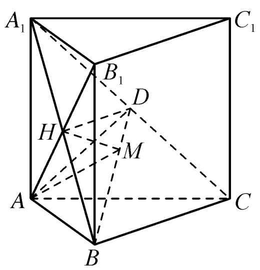
(2)**解法 1(空间向量法)** 连接 AB_1. 因为 $AB=AA_1$，所以 $AB_1\perp A_1B$，又因为平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$，所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC，因为 $BC\subset$ 平面 A_1BC，所以 $AB_1\perp BC$. 设 $AB_1\cap A_1B=E$，则由(1)得 $AE=\sqrt{2}$，则 $AA_1=AB=2$. 因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，从而 $AA_1\perp BC$. 因为 AB_1，$AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，且 $AB_1\cap AA_1=A$，所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，又 $AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp AB$，由 $V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot AA_1=\frac{1}{2}\times2\times BC\times2=4$ 得 $BC=2$. 以 BC，BA，BB_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，[1]

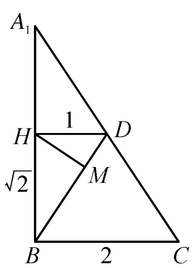


所以 $B(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$A_1(0,2,2)$，$E(0,1,1)$，$D(1,1,1)$. 易得平面 BDC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{AE}=(0,-1,1)$，设平面

BDA 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2y=0,\\ x+y+z=0,\end{cases}$ 所以 $y=0$，令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,-1)$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{0+0-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$，设二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 α，由图易知 α 为钝角，故 $\cos\alpha=\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=-\dfrac{1}{2}$，则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

解法 2(综合法)　连接 AB_1. 因为 $AB=AA_1$，所以 $AB_1\perp A_1B$. 又因为平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$，所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC. 又 $BC\subset$ 平面 A_1BC，所以 $AB_1\perp BC$. 设 $AB_1\cap A_1B=H$，则由(1)得 $AH=\sqrt{2}$，则 $AA_1=AB=2$. 因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，从而 $AA_1\perp BC$，因为 AB_1，$AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，且 $AB_1\cap AA_1=A$，所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，又 $AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp AB$，由 $V_{\text{三棱柱}ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot AA_1=\dfrac{1}{2}\times2\times BC\times2=4$ 得 $BC=2$. 过 H 作 $HM\perp BD$，垂足为 M，连接 AM，HD，因为 $AH\perp$ 平面 A_1BC，$BD\subset$ 平面 A_1BC，所以 $AH\perp BD$，从而 $\angle AMH$ 为二面角 $A-BD-H$ 的平面角，即为二面角 $A-BD-C$ 的平面角的补角. 在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1BC$ 中，$BC=2$，$A_1B=2\sqrt{2}$，$HD/\!/BC$，且 $HD=\dfrac{1}{2}BC=1$，所以 $MH=\dfrac{BH\cdot HD}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}\times1}{\sqrt{1+2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\tan\angle AMH=\dfrac{AH}{MH}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\sqrt{3}$，故 $\angle AMH=\dfrac{\pi}{3}$，故二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.





规范书写【1】需证明两两垂直后才能建系，否则扣 1 分.

20. (1)**解**：零假设为 H_0：患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯无差异，则 $\chi^2=\dfrac{200\times(40\times90-10\times60)^2}{100\times100\times50\times150}=24>6.635$，所以 H_0 不成立，所以有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

(2)① **证明**：$R=\dfrac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}\div\dfrac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}=\dfrac{P(B|A)\cdot P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B}|A)\cdot P(B|\bar{A})}=\dfrac{\dfrac{P(AB)}{P(A)}\cdot\dfrac{P(\bar{B}\bar{A})}{P(\bar{A})}}{\dfrac{P(\bar{B}A)}{P(A)}\cdot\dfrac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}}=\dfrac{P(AB)\cdot P(\bar{B}\bar{A})}{P(\bar{B}A)\cdot P(B\bar{A})}=\dfrac{\dfrac{P(AB)}{P(B)}\cdot\dfrac{P(\bar{B}\bar{A})}{P(\bar{B})}}{\dfrac{P(\bar{B}A)}{P(\bar{B})}\cdot\dfrac{P(B\bar{A})}{P(B)}}=\dfrac{P(A|B)\cdot P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B)\cdot P(A|\bar{B})}$，故等式成立.

②**解**：$P(A|B)=\dfrac{n(AB)}{n(B)}=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$，$P(\bar{A}|B)=\dfrac{n(\bar{A}B)}{n(B)}=\dfrac{60}{100}=\dfrac{3}{5}$，又 $P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{n(\bar{A}\bar{B})}{n(\bar{B})}=\dfrac{90}{100}=\dfrac{9}{10}$，$P(A|\bar{B})=\dfrac{n(A\bar{B})}{n(\bar{B})}=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$，所以由①中结果可知，$R=\dfrac{\frac{2}{5}\times\frac{9}{10}}{\frac{3}{5}\times\frac{1}{10}}=6$. 故 R 的估计值为 6.

21. 解：(1)因为点 $A(2,1)$ 在双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$ 上，所以有 $\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{a^2-1}=1$，解得 $a^2=2$，所以双曲线 C：$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

解法 1　设直线 l：$y=kx+m$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-y^2=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y，$(1-2k^2)x^2-4kmx-2m^2-2=0$，显然 $1-2k^2\neq0$，否则不可能有两个交点，而 $\Delta=(4km)^2-4(1-2k^2)\cdot(-2m^2-2)=8(m^2+1-2k^2)>0$，$x_1+x_2=\dfrac{4km}{1-2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-2m^2-2}{1-2k^2}$. 因为 $k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=\dfrac{kx_1+m-1}{x_1-2}+\dfrac{kx_2+m-1}{x_2-2}=0$，所以 $2kx_1x_2+(m-1-2k)(x_1+x_2)-4(m-1)=0$，$-km^2-k+km^2-km-2k^2m-m+1+2k^2m-2k^2=0$，所以 $2k^2+k-1+km+m=0$，所以 $(k+1)(2k-1+m)=0$. 当 $2k-1+m=0$ 时，$m=1-2k$，直线 l 的方程为 $y=kx+1-2k=k(x-2)+1$，恒过定点 $A(2,1)$ 不可能，舍去. 所以 $k=-1$.

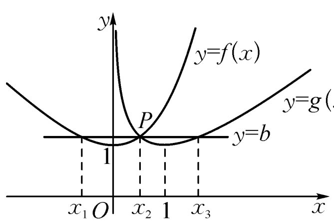
解法 2　由 $k_{AP}+k_{AQ}=0$ 可设 $k_{AP}=k$，$k_{AQ}=-k$，且 $k\neq0$，则直线 AP，AQ 的方程分别为 $y-1=k(x-2)$，$y-1=-k(x-2)$，联立 $\begin{cases}y-1=k(x-2),\\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1-2k^2)x^2-4k(1-2k)x+(8k-8k^2-4)=0$，$\begin{cases}1-2k^2\neq0,\\ \Delta>0,\\ 2x_P=\dfrac{8k-8k^2-4}{1-2k^2},\end{cases}$ 所以 $x_P=\dfrac{4k-4k^2-2}{1-2k^2}$，所以 $y_P=\dfrac{2k^2-4k+1}{1-2k^2}$，即 $P\left(\dfrac{4k-4k^2-2}{1-2k^2},\dfrac{2k^2-4k+1}{1-2k^2}\right)$. 同理可得 $Q\left(\dfrac{-4k-4k^2-2}{1-2k^2},\dfrac{2k^2+4k+1}{1-2k^2}\right)$. 所以 $k_{PQ}=\dfrac{\dfrac{2k^2-4k+1}{1-2k^2}-\dfrac{2k^2+4k+1}{1-2k^2}}{\dfrac{4k-4k^2-2}{1-2k^2}-\dfrac{-4k-4k^2-2}{1-2k^2}}=\dfrac{-8k}{8k}=-1$.

(2)设 AP 的斜率为 k_1，倾斜角为 α，AQ 的斜率为 $-k_1$，倾斜角为 β，不妨设 $k_1>0$，则 $\tan\angle PAQ=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-k_1-k_1}{1+k_1\cdot(-k_1)}$，即 $\dfrac{-2k_1}{1-k_1^2}=2\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{2}k_1^2-k_1-\sqrt{2}=0$，解得 $k_1=\sqrt{2}$ 或 $k_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$(舍). 则直线 AP：$y=\sqrt{2}(x-2)+1$，直线 AQ：$y=-\sqrt{2}(x-2)+1$. 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$. 由 $\begin{cases}y=\sqrt{2}(x-2)+1,\\ x^2-2y^2=2,\end{cases}$ 得 $3x^2+(4\sqrt{2}-16)x+20-8\sqrt{2}=0$，所以 $x_1=\dfrac{10-4\sqrt{2}}{3}$. 由 $\begin{cases}y=-\sqrt{2}(x-2)+1,\\ x^2-2y^2=2,\end{cases}$ 得 $3x^2-(16+4\sqrt{2})x+20+8\sqrt{2}=0$，$x_2=$

$\frac{10+4\sqrt{2}}{3}$. 由第(1)问解法 1 得 $x_1+x_2=\frac{-4m}{-1}=4m=\frac{20}{3}$，故 $m=\frac{5}{3}$，PQ：$y=-x+\frac{5}{3}$，此时 $|PQ|=\sqrt{2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{2}\times\frac{8\sqrt{2}}{3}=\frac{16}{3}$，$A$ 到直线 PQ 的距离 $d=\frac{\left|2+1-\frac{5}{3}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 所以 $S_{\triangle PAQ}=\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{9}$.

22. (1)**解**：$f'(x)=e^x-a$. ①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)=e^x-a>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最小值，不满足；[1] ②若 $a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln a$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\cdot\ln a$. 因为 $g(x)=ax-\ln x$，定义域为 $\{x\mid x>0\}$，所以 $g'(x)=a-\frac{1}{x}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a$. 依题意得 $a-a\ln a=1+\ln a$，即 $\ln a-\frac{a-1}{a+1}=0$，令 $h(a)=\ln a-\frac{a-1}{a+1}(a>0)$，则 $h'(a)=\frac{a^2+1}{a(a+1)^2}>0$ 恒成立，所以 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $h(1)=0$，所以 $\ln a-\frac{a-1}{a+1}=0$ 有唯一解 $a=1$. 综上，$a=1$.

(2)**证明**：由(1)易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点，设三个不同交点的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3，不妨设 $x_1<x_2<x_3$，显然有 $x_1<0<x_2<1<x_3$，则有 $f(x_1)=f(x_2)=g(x_2)=g(x_3)=b$，即 $e^{x_1}-x_1=e^{x_2}-x_2=x_2-\ln x_2=x_3-\ln x_3$.



【启发式分析】结合所证，需要寻求 x_1,x_2,x_3 的关系，因此先探究 x_1 与 x_2 的关系. 两条曲线的交点是切入点.

由 $e^{x_1}-x_1=x_2-\ln x_2$ 得 $e^{x_1}-x_1=e^{\ln x_2}-\ln x_2$，即 $f(x_1)=f(\ln x_2)$. 由 $x_1<0$，$\ln x_2<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，知 $x_1=\ln x_2$，则 $e^{x_1}=x_2$. 由 $e^{x_2}-x_2=x_3-\ln x_3=e^{\ln x_3}-\ln x_3$，得 $f(x_2)=f(\ln x_3)$. 因为 $x_2>0$，$\ln x_3>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x_2=\ln x_3$. 因为 $e^{x_1}-x_1=x_3-\ln x_3$，所以 $x_1+x_3=e^{x_1}+\ln x_3=x_2+x_2=2x_2$，故 x_1,x_2,x_3 成等差数列. 所以存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

规范书写 【1】不能缺少 $a\leqslant 0$ 的情况，否则扣 1 分.

2022 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅱ

1. B　$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$A\cap B=\{1,2\}$.

2. D　$(2+2i)(1-2i)=2-4i^2-2i=6-2i$.

3. D　设 $OD_1=DC_1=CB_1=BA_1=1$，则 $CC_1=k_1$，$BB_1=k_2$，$AA_1=k_3$. 由题意得 $k_3=k_1+0.2$，$k_3=k_2+0.1$，且 $\frac{DD_1+CC_1+BB_1+AA_1}{OD_1+DC_1+CB_1+BA_1}=0.725$，即 $\frac{0.5+3k_3-0.3}{4}=0.725$，解得 $k_3=0.9$.

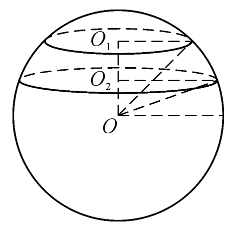
4. C　由已知 $\boldsymbol{c}=(3+t,4)$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$，故 $\frac{9+3t+16}{|\boldsymbol{c}|\cdot 5}=\frac{3+t}{|\boldsymbol{c}|\cdot 1}$，解得 $t=5$.

5. B　先运用捆绑法，将丙和丁看作一个整体，先排甲有 A_2^1 种方法，再排乙、丙丁、戊有 A_3^3 种方法，最后排丙和丁，有 A_2^2 种方法，则所求排列方式共有 $A_2^1A_3^3A_2^2=24$(种).

6. C　**解法 1(公式法)**　由题意得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)\cdot\sin\beta$，即 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\sin\beta-2\sin\alpha\sin\beta$，整理可得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta$，等式两边同除以 $\cos\alpha\cos\beta$ 得 $\tan\alpha+1=\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta$，则 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-1$.

解法 2(特殊值法)　令 $\beta=0$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，取 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$，排除 A，B；令 $\alpha=0$，则 $\sin\beta+\cos\beta=2\sin\beta$，取 $\beta=\frac{\pi}{4}$，排除 D.

7. A　由题意得，上底面所在平面截球所得圆的半径为 $3\sqrt{3}\times\sin 60°\times\frac{2}{3}=3$，下底面所在平面截球所得圆的半径为 $4\sqrt{3}\times\sin 60°\times\frac{2}{3}=4$，设外接球球心为 O，半径为 R，则有 $\begin{cases}OO_1^2+9=R^2,\\(OO_1-1)^2+16=R^2,\end{cases}$ 解得 $R^2=25$，所以球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\cdot 25=100\pi$.



8. A　**【启发式分析】**由于求 22 项和，故需探究 $f(x)$ 的周期性.

令 $y=1$ 得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)\cdot f(1)=f(x)$，则 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，故 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$，$f(x+3)=f(x+2)-f(x+1)$，两式相加可得 $f(x+3)=-f(x)$，则 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$，故 $f(x)$ 的周期为 6.

【启发式分析】需要求出 $f(2)$，先得求出 $f(0)$，而抽象函数求值常用赋值法.

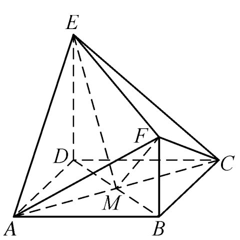
令 $x=1,y=0$ 得 $f(1)+f(1)=f(1)\cdot f(0)$，则 $f(0)=2$，$f(2)=f(1)-f(0)=1-2=-1$，$f(3)=f(2)-f(1)=-1-1=-2$，$f(4)=f(3)-f(2)=-2-(-1)=-1$，$f(5)=f(4)-f(3)=-1-(-2)=1$，$f(6)=f(5)-f(4)=1-(-1)=2$，故 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=3[f(1)+f(2)+\cdots+f(6)]+f(19)+f(20)+f(21)+f(22)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-3$，即 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=-3$.

9. AD　由题意，$\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=0$，则 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，

所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$,则 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$. 对于选项A,当 $x\in\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$ 时,$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$,由 $y=\sin u$ 的图象可知,函数 $f(x)$ 单调递减,故A正确;对于选项B,当 $x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$ 时,$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$,由正弦函数 $y=\sin u$ 的图象可知,$f(x)$ 只有一个极值点,故B错误;对于选项C,当 $x=\frac{7\pi}{6}$ 时,$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin 3\pi=0$,故 $x=\frac{7\pi}{6}$ 不是对称轴,故C错误;对于D,直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$ 与 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 交于点 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,又 $f'(x)=2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,则 $f'(0)=-1$,则 $y=f(x)$ 在点 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处切线方程为 $y=-x+\frac{\sqrt{3}}{2}$,故D正确.

10. ACD　设 FM 的中点为 N,则 $x_A=x_N=\frac{\frac{p}{2}+p}{2}=\frac{3}{4}p$,所以 $y_A^2=2px_A=2p\cdot\frac{3}{4}p=\frac{3}{2}p^2(y_A>0)$,所以 $y_A=\frac{\sqrt{6}}{2}p$,故 $k_{AB}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}p}{\frac{3}{4}p-\frac{p}{2}}=2\sqrt{6}$,故A正确;因为 $y_Ay_B=-p^2$,所以 $y_B=-\frac{\sqrt{6}}{3}p$,则 $x_B=\frac{1}{3}p$,所以 $|OB|^2=x_B^2+y_B^2=\frac{p^2}{9}+\frac{2p^2}{3}=\frac{7p^2}{9}\neq\frac{p^2}{4}$,故B错误;$|AB|=\frac{3}{4}p+\frac{p}{3}+p=\frac{25}{12}p>2p=4|OF|$,故C正确;由选项A,B知 $A\left(\frac{3}{4}p,\frac{\sqrt{6}}{2}p\right)$,$B\left(\frac{p}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}p\right)$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\frac{3}{4}p,\frac{\sqrt{6}}{2}p\right)\cdot\left(\frac{p}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}p\right)=\frac{p^2}{4}-p^2=-\frac{3}{4}p^2<0$,所以 $\angle AOB$ 为钝角,又 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(-\frac{p}{4},\frac{\sqrt{6}}{2}p\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}p,-\frac{\sqrt{6}}{3}p\right)=\frac{p^2}{6}-p^2=-\frac{5}{6}p^2<0$,所以 $\angle AMB$ 为钝角,又四边形 $AOBM$ 的内角和为 $360°$,所以 $\angle OAM+\angle OBM<180°$,故D正确.

11. CD　设 $AB=ED=2FB=2$,则 $V_1=\frac{1}{3}\times2\times2=\frac{4}{3}$,$V_2=\frac{1}{3}\times2\times1=\frac{2}{3}$. 连接 BD 交 AC 于 M,连接 EM,FM,则 $FM=\sqrt{3}$,$EM=\sqrt{6}$,$EF=3$,故 $\triangle EMF$ 为直角三角形,$S_{\triangle EMF}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,易证 $AC\perp$ 平面 $BFED$,即 $AC\perp$ 平面 EMF,所以 $V_3=\frac{1}{3}S_{\triangle EMF}\times AC=2$,则 $V_3=V_1+V_2$,$2V_3=3V_1$,故C,D正确.



12. BC　**解法1(基本不等式法)**　**【启发式分析】**欲求 $x+y$ 的取值范围,需要配凑出 $x+y$,再根据基本不等式 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ 构建不等关系.

$1=(x+y)^2-3xy$,则 $(x+y)^2-1=3xy\leqslant3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$,解得 $(x+y)^2\leqslant4$,$-2\leqslant x+y\leqslant2$,故A错误,B正确;

【启发式分析】欲求 x^2+y^2 的取值范围,可根据常见不等式 $-\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$ 构建不等关系.

又 $-\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant xy=x^2+y^2-1\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$,当且仅当 $x=y$ 时取等号,解得 $\frac{2}{3}\leqslant x^2+y^2\leqslant2$,故C正确,D错误.

解法2(三角换元法)　**【启发式分析】**二次齐次式,可根据公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 实施三角换元.

由 $x^2+y^2-xy=1$ 得 $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2=1$,令 $\begin{cases}x-\frac{y}{2}=\cos\theta,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta,\\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta,\end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$,所以 $x+y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in[-2,2]$,故A错误,B正确;$x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin2\theta-\frac{1}{3}\cos2\theta+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\sin(2\theta-\varphi)+\frac{4}{3}\in\left[\frac{2}{3},2\right]$,故C正确,D错误.

13. 0.14　由题意知 $P(X>2)=0.5$,则 $P(X>2.5)=0.5-0.36=0.14$.

14. $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$　$y=-\frac{1}{\mathrm{e}}x$　当 $x>0$ 时,$y=\ln x$,设切点坐标为 $(x_0,\ln x_0)$,$y'=\frac{1}{x}$,则 $\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}$,解得 $x_0=\mathrm{e}$,故所求切线的斜率为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$,则切线的方程为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$. 又 $y=\ln|x|$ 为偶函数,根据对称性,可得另外一条过原点的切线方程为 $y=-\frac{1}{\mathrm{e}}x$.

15. $\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$　因为 $k_{AB}=\frac{a-3}{2}$,所以对称直线 l 的斜率为 $\frac{3-a}{2}$,$B(0,a)$ 也在对称直线 l 上,故直线 l 方程为 $y-a=\frac{3-a}{2}x$,即 $(3-a)x-2y+2a=0$,所以 $\frac{|3(a-3)+4+2a|}{\sqrt{4+(3-a)^2}}\leqslant1$,解得 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$.

16. $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$　**【启发式分析】**由 $|MA|=|NB|$ 想到取 AB 的中点 E,同时 E 也为 MN 的中点,从而得到椭圆的中点弦,而中点弦问题往往选用点差法.

取 AB 的中点为 E,因为 $|MA|=|NB|$,所以 $|ME|=|NE|$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1,\\ \frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{3}=1,\end{cases}$ 两式相减整理得,$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\times\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{OE}\cdot k_{AB}=-\frac{1}{2}$. 设直线 $l:y=kx+m$,$k<0$,$m>0$,令 $x=0$,$y=m$,令 $y=0$,$x=-\frac{m}{k}$,所以 $E\left(-\frac{m}{2k},\frac{m}{2}\right)$,所以 $k\times\frac{m}{\frac{-m}{k}}=-k^2=-\frac{1}{2}$,解得 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $|MN|=2\sqrt{3}$,所以

$\sqrt{m^2+\frac{m^2}{k^2}}=2\sqrt{3}$，即 $m^2+2m^2=12$，解得 $m=2$，所以直线 $l:y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$，即 $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$.

17. （1）**证明**：设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,[1] 所以 $\begin{cases}a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1,\\a_1+d-2b_1=8b_1-(a_1+3d),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}d=2b_1,\\a_1+2d-5b_1=0,\end{cases}$ 解得 $b_1=a_1=\frac{d}{2}$，所以原命题得证.

(2)**解**：由(1)知 $d=2b_1=2a_1$，由 $b_k=a_m+a_1$ 知，$b_1\cdot 2^{k-1}=a_1+(m-1)\cdot d+a_1$，即 $b_1\cdot 2^{k-1}=b_1+(m-1)\cdot 2b_1+b_1$，即 $2^{k-1}=2m$. 因为 $1\leqslant m\leqslant 500$，故 $2\leqslant 2^{k-1}\leqslant 1000$，解得 $2\leqslant k\leqslant 10$. 故集合 $\{k\mid b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$ 中元素的个数为 9.

规范书写【1】题目中未出现 d，所以需先设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，否则扣 1 分.

18. 解：(1) $S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $a^2+c^2-b^2=2$. 由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，整理得 $ac\cos B=1$，则 $\cos B>0$. 又 $\sin B=\frac{1}{3}$，所以 $\cos B=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$ac=\frac{1}{\cos B}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

(2)由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，则 $\frac{b^2}{\sin^2 B}=\frac{a}{\sin A}\cdot\frac{c}{\sin C}=\frac{ac}{\sin A\sin C}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\frac{9}{4}$，则 $\frac{b}{\sin B}=\frac{3}{2}$，所以 $b=\frac{3}{2}\sin B=\frac{1}{2}$.

19. 解：(1)平均年龄 $\bar{x}=(5\times 0.001+15\times 0.002+25\times 0.012+35\times 0.017+45\times 0.023+55\times 0.020+65\times 0.017+75\times 0.006+85\times 0.002)\times 10=47.9$(岁).

(2)设 A ="一位这种疾病患者的年龄位于区间[20,70)"，所以 $P(A)=1-P(\bar{A})=1-(0.001+0.002+0.006+0.002)\times 10=1-0.11=0.89$.

(3)设 B ="任选一人年龄位于区间[40,50)"，C ="任选一人患这种疾病"，[1] 则由条件概率公式可得 $P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{0.1\%\times 0.023\times 10}{16\%}=\frac{0.001\times 0.23}{0.16}=0.0014375\approx 0.0014$.

规范书写【1】需设出事件后，再求概率.

20. (1)**证明**：如图 1，连接 BO 并延长交 AC 于点 D，连接 OA，PD. 因为 PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，所以 $PO\perp$ 平面 ABC，$AO,BO\subset$ 平面 ABC，所以 $PO\perp AO$，$PO\perp BO$. 又 $PA=PB$，所以 $\triangle POA\cong\triangle POB$，所以 $OA=OB$，所以 $\angle OAB=\angle OBA$. 又 $AB\perp AC$，即 $\angle BAC=90°$，所以 $\angle OAB+\angle OAD=90°$，$\angle OBA+\angle ODA=90°$，所以 $\angle ODA=\angle OAD$，所以 $AO=DO$，即 $AO=DO=OB$，所以 O 为 BD 的中点. 又 E 为 PB 的中点，所以 $OE\parallel PD$. 又 $OE\not\subset$ 平面 PAC，$PD\subset$ 平面 PAC，所以 $OE\parallel$ 平面 PAC.[1]

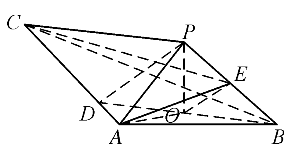


图 1

(2)**解**：过点 A 作 $Az\parallel OP$，建立如图 2 所示的空间直角坐标系. 因为 $PO=3$，$AP=5$，所以 $OA=\sqrt{AP^2-PO^2}=4$.

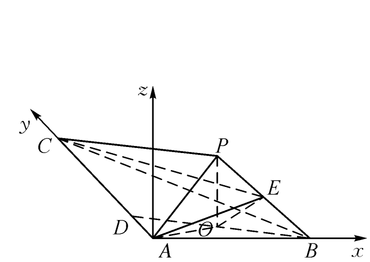


图 2

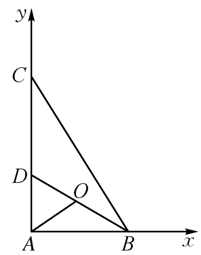


图 3

由(1)知 O 为 BD 的中点，则 $BD=2OA=8$. 又 $\angle OBA=\angle OBC=30°$，所以 $AD=4$，$AB=4\sqrt{3}$，则 $AC=12$，所以 $O(2\sqrt{3},2,0)$，$B(4\sqrt{3},0,0)$，$P(2\sqrt{3},2,3)$，$C(0,12,0)$，所以 $E\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AE}=\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(4\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,12,0)$. 设平面 AEB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=3\sqrt{3}x+y+\frac{3}{2}z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=4\sqrt{3}x=0,\end{cases}$ 令 $z=2$，则 $y=-3$，$x=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,-3,2)$. 设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=3\sqrt{3}a+b+\frac{3}{2}c=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=12b=0,\end{cases}$ 令 $a=\sqrt{3}$，则 $c=-6$，$b=0$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,-6)$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{-12}{\sqrt{13}\times\sqrt{39}}=-\frac{4\sqrt{3}}{13}$. 设二面角 $C-AE-B$ 为 θ，由图可知二面角 $C-AE-B$ 为钝二面角，所以 $\cos\theta=-\frac{4\sqrt{3}}{13}$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{11}{13}$，故二面角 $C-AE-B$ 的正弦值为 $\frac{11}{13}$.

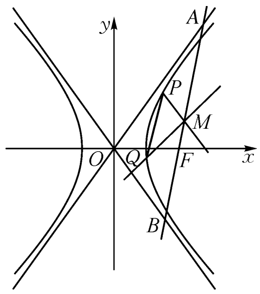
规范书写【1】运用线面平行判定定理时，条件要写全，否则扣 1 分.

21. 解：(1)由题意可得 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，$\sqrt{a^2+b^2}=2$，故 $a=1$，$b=\sqrt{3}$. 因此 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)【**启发式分析**】观察到条件①②③中多处涉及点 M，可以先探究点 M 的轨迹方程，而点 M 是直线 PM 与 QM 的交点，因此设出直线 PQ 的方程，并与双曲线方程联立.

设直线 PQ 的方程为 $y=kx+b(k\neq 0)$，将直线 PQ 的方程代入 C 的方程得 $(3-k^2)x^2-2kbx-b^2-3=0$，则 $x_1+x_2=\frac{2kb}{3-k^2}$，$x_1x_2=-\frac{b^2+3}{3-k^2}$，$x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{3(b^2+3-k^2)}}{k^2-3}$. 设点 M 的坐标为 (x_M,y_M)，则 $\begin{cases}y_M-y_1=-\sqrt{3}(x_M-x_1),\\y_M-y_2=\sqrt{3}(x_M-x_2),\end{cases}$ 两式相减，得 $y_1-y_2=2\sqrt{3}x_M-\sqrt{3}(x_1+x_2)$，而 $y_1-y_2=(kx_1+b)-(kx_2+b)=k(x_1-x_2)$，故 $2\sqrt{3}x_M=k(x_1-x_2)+\sqrt{3}(x_1+x_2)$，解得 $x_M=\frac{k\sqrt{b^2+3-k^2}-kb}{k^2-3}$. 两式相加，得 $2y_M-(y_1+y_2)=\sqrt{3}(x_1-x_2)$，而 $y_1+y_2=(kx_1+b)+(kx_2+b)=k(x_1+x_2)+2b$，故 $y_M=\frac{3\sqrt{b^2+3-k^2}-3b}{k^2-3}$，所以 $y_M=\frac{3}{k}x_M$. 因此，点 M 的轨迹为直线 $y=$

$\dfrac{3}{k}x$，其中 k 为直线 PQ 的斜率.



若选①②.

【启发式分析】由 $PQ/\!/AB$，可设直线 AB 的方程，与渐近线方程联立可得 A,B 两点坐标，与直线 $y=\dfrac{3}{k}x$ 联立可得 M 点坐标，证明 M 为 AB 的中点.

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，并设 A 的坐标为 (x_A,y_A)，B 的坐标为 (x_B,y_B). 则 $\begin{cases}y_A=k(x_A-2),\\ y_A=\sqrt{3}x_A,\end{cases}$ 解得 $x_A=\dfrac{2k}{k-\sqrt{3}}$，$y_A=\dfrac{2\sqrt{3}k}{k-\sqrt{3}}$. 同理可得 $x_B=\dfrac{2k}{k+\sqrt{3}}$，$y_B=-\dfrac{2\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}}$. 此时 $x_A+x_B=\dfrac{4k^2}{k^2-3}$，$y_A+y_B=\dfrac{12k}{k^2-3}$. 而点 M 的坐标满足 $\begin{cases}y_M=k(x_M-2),\\ y_M=\dfrac{3}{k}x_M,\end{cases}$ 解得 $x_M=\dfrac{2k^2}{k^2-3}=\dfrac{x_A+x_B}{2}$，$y_M=\dfrac{6k}{k^2-3}=\dfrac{y_A+y_B}{2}$，故 M 为 AB 的中点，即 $|MA|=|MB|$.

若选①③.

【启发式分析】欲证明 $PQ/\!/AB$，可设直线 AB 的方程为 $y=m(x-2)$，再证明 $k=m$.

当直线 AB 的斜率不存在时，点 M 即为点 $F(2,0)$，此时 M 不在直线 $y=\dfrac{3}{k}x$ 上，矛盾. 当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=m(x-2)(m\neq 0)$，并设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$. 则 $\begin{cases}y_A=m(x_A-2),\\ y_A=\sqrt{3}x_A,\end{cases}$ 解得 $x_A=\dfrac{2m}{m-\sqrt{3}}$，$y_A=\dfrac{2\sqrt{3}m}{m-\sqrt{3}}$. 同理 $x_B=\dfrac{2m}{m+\sqrt{3}}$，$y_B=-\dfrac{2\sqrt{3}m}{m+\sqrt{3}}$. 此时 $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2m^2}{m^2-3}$，$y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{6m}{m^2-3}$. 由于点 M 同时在直线 $y=\dfrac{3}{k}x$ 上，故 $6m=\dfrac{3}{k}\cdot 2m^2$，解得 $k=m$. 因此 $PQ/\!/AB$.

若选②③.

【启发式分析】欲证明 M 在 AB 上，可求出 AB 的中点坐标，以及 M 点坐标，两点重合即可.

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，并设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$. 则 $\begin{cases}y_A=k(x_A-2),\\ y_A=\sqrt{3}x_A,\end{cases}$ 解得 $x_A=\dfrac{2k}{k-\sqrt{3}}$，$y_A=\dfrac{2\sqrt{3}k}{k-\sqrt{3}}$. 同理可得 $x_B=\dfrac{2k}{k+\sqrt{3}}$，$y_B=-\dfrac{2\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}}$. 设 AB 的中点为 $C(x_C,y_C)$，则 $x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2k^2}{k^2-3}$，$y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{6k}{k^2-3}$. 由于 $|MA|=|MB|$，故 M 在 AB 的垂直平分线上，即 M 在直线 $y-y_C=-\dfrac{1}{k}(x-x_C)$ 上. 将该直线与 $y=\dfrac{3}{k}x$ 联立，解得 $x_M=\dfrac{2k^2}{k^2-3}=x_C$，$y_M=\dfrac{6k}{k^2-3}=y_C$，即点 M 恰为 AB 中点. 故点 M 在直线 AB 上.

22. (1)**解**：当 $a=1$ 时，$f(x)=xe^x-e^x=(x-1)e^x$，则 $f'(x)=xe^x$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

(2)**解**：由 $f(x)<-1$ 得 $xe^{ax}-e^x+1<0$，设 $h(x)=xe^{ax}-e^x+1$，则 $h(0)=0$. 故不等式 $f(x)<-1$ 等价于 $h(x)<h(0)$.

【启发式分析】要使得 $h(x)<0$ 恒成立，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上就必须单调递减，即 $h'(x)<0$ 恒成立.

又 $h'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^x$，设 $g(x)=(1+ax)e^{ax}-e^x$，则 $g'(x)=(2a+a^2x)e^{ax}-e^x$.

【启发式分析】观察到 $g(0)=0$，因此需要对 $g'(0)$ 的正负分类讨论.

若 $a>\dfrac{1}{2}$，则 $g'(0)=2a-1>0$. 因为 $g'(x)$ 为连续不间断函数，故存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $\forall x\in(0,x_0)$，总有 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，故 $g(x)>g(0)=0$，故 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，故 $h(x)>h(0)=0$，与题设矛盾. 若 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$，则 $h'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^x=e^{ax+\ln(1+ax)}-e^x$.

【启发式分析】由于 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$，欲证 $h'(x)<0$，只要证明 $\ln(1+ax)<ax$，即证 $\ln(1+x)<x$.

下证对任意 $x>0$，总有 $\ln(1+x)<x$ 成立. 证明：设 $S(x)=\ln(1+x)-x$，故 $S'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}<0$，故 $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $S(x)<S(0)=0$，即 $\ln(1+x)<x$ 成立. 由上述不等式有 $e^{ax+\ln(1+ax)}-e^x<e^{ax+ax}-e^x=e^{2ax}-e^x\leqslant 0$，故 $h'(x)\leqslant 0$ 总成立，即 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)<h(0)=0$. 当 $a\leqslant 0$ 时，有 $h'(x)=e^{ax}-e^x+axe^{ax}<1-1+0=0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)<h(0)=0$. 综上，a 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.

(3)**证法 1** 取 $a=\dfrac{1}{2}$，则 $\forall x>0$，总有 $xe^{\frac{x}{2}}-e^x+1<0$ 成立.

【启发式分析】观察所要证明不等式，要出现对数式，可以对指数式进行换元，再对数化.

令 $t=e^{\frac{x}{2}}$，则 $t>1$，$t^2=e^x$，$x=2\ln t$，故 $2t\ln t<t^2-1$，即 $2\ln t<t-\dfrac{1}{t}$ 对任意的 $t>1$ 恒成立. 所以对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $2\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}<\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}-\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$，整理得 $\ln(n+1)-\ln n<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，故 $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n=\ln(n+1)$，故不等式成立.

证法 2 【启发式分析】可以考虑从所证出发，寻找使结论成立的充分条件.

要证 $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$，即证 $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln\dfrac{2}{1}+\ln\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln\dfrac{n+1}{n}$，故只需证 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln\dfrac{n+1}{n}$.

【启发式分析】观察不等式右端，可以令 $x=\frac{1}{n}$，则 $n=\frac{1}{x}$，回代上式，即 $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}=\frac{x}{\sqrt{x+1}}>\ln(1+x)$，因此需要构造函数.

令 $h(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}-\ln(1+x)$，其中 $x>0$，则 $h'(x)=\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(x+1)\sqrt{1+x}}\geqslant 0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)>h(0)=0$，所以 $\frac{x}{\sqrt{1+x}}>\ln(1+x)$，令 $x=\frac{1}{n}$，则有 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln\frac{n+1}{n}$，所以 $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$.

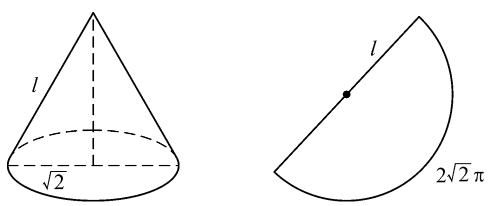
解后反思 1. 函数参数的不等式的恒成立问题，应该利用导数讨论函数的单调性，需要关注端点的函数值，并结合端点处导数的符号合理分类讨论；2. 导数背景下数列不等式的证明，应根据已有的函数不等式合理构建数列不等式.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅰ

1. B　因为 $A=\{x\mid -2<x<4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，所以 $A\cap B=\{2,3\}$.

2. C　因为 $z=2-\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=2+\mathrm{i}$，故 $z(\bar{z}+\mathrm{i})=(2-\mathrm{i})(2+2\mathrm{i})=6+2\mathrm{i}$.

3. B　如图，设该圆锥的母线长为 l，则 $2\sqrt{2}\pi=\pi l$，所以 $l=2\sqrt{2}$.



4. A　**解法 1**　由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 得 $2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，故 A 正确.

解法 2　当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，故 A 正确；当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，此时函数 $f(x)$ 不单调递增，故 B 错误；当 $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right)$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，故 C 错误；当 $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{4\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right)$，此时函数 $f(x)$ 不单调递增，故 D 错误.

5. C　由椭圆的定义得 $|MF_1|+|MF_2|=2a=6\geqslant 2\sqrt{|MF_1|\cdot|MF_2|}$，故 $|MF_1|\cdot|MF_2|\leqslant 9$，当且仅当 $|MF_1|=|MF_2|=3$ 时，等号成立.

6. C　**解法 1**　因为 $\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{\tan^2\theta+1}$，又 $\tan\theta=-2$，所以 $\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{4-2}{4+1}=\frac{2}{5}$.

解法 2　因为 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-2$，所以 $\sin\theta=-2\cos\theta$，又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以 $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$，从而 $\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\theta(1+2\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{-2\cos\theta(1-4\cos^2\theta)}{-\cos\theta}=2-8\cos^2\theta=2-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}$.

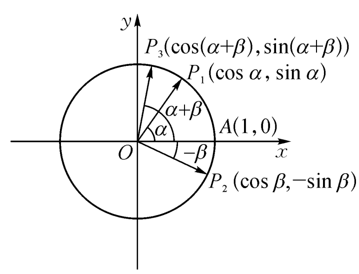
7. D　注意到 $y=0$ 是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的渐近线，所以曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 有两条切线的必要条件是 $b>0$，同时，要求点 (a,b) 在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的下方，即 $b<\mathrm{e}^a$，故 $0<b<\mathrm{e}^a$.

8. B　设事件甲、乙、丙、丁发生的概率分别为 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$，$P(D)$，则 $P(A)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，$P(C)=\frac{5}{6\times 6}=\frac{5}{36}$，$P(D)=\frac{6}{6\times 6}=\frac{1}{6}$. 由题意可知 $P(AC)=0$，$P(AD)=\frac{1}{36}$，$P(BC)=\frac{1}{36}$，$P(CD)=0$，所以 $P(AD)=\frac{1}{36}=P(A)\cdot P(D)$，故 B 正确.

9. CD　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，则 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的平均数为 $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+c)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+c=\bar{x}+c$，故 A 错误；设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的中位数为 x_k，则 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的中位数为 x_k+c，故 B 错误；设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$，方差为 s^2，则 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的平均数为 $\bar{y}=\bar{x}+c$，它的方差为 $s_1^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{x}-c)^2=s^2$，故 C 正确；设原样本数据中最大数据为 x_i，最小数据为 x_j，则新样本数据中最大数据与最小数据分别为 x_i+c，x_j+c，故两组数据的极差均为 x_i-x_j，故 D 正确.

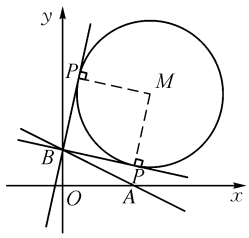
10. AC　**解法 1**　由题意得 $|\overrightarrow{OP_1}|=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=1$，$|\overrightarrow{OP_2}|=\sqrt{(-\sin\beta)^2+\cos^2\beta}=1$，故 A 正确；$|\overrightarrow{AP_1}|=\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2-2\cos\alpha}$，$|\overrightarrow{AP_2}|=\sqrt{(\cos\beta-1)^2+(-\sin\beta)^2}=\sqrt{2-2\cos\beta}$，故 B 错误；$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\cos(\alpha+\beta)$，$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$，故 C 正确；$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\cos\alpha$，$\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\cos\beta\cos(\alpha+\beta)-\sin\beta\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+2\beta)$，故 D 错误.

解法 2　如图，对于 A，$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=1$，故 A 正确；对于 B，只有当 $\alpha=\beta$ 时成立，故 B 错误；对于 C，$\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP_3}\rangle=\alpha+\beta$，$\langle\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2}\rangle=\alpha+\beta$，故 C 正确；对于 D，$\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP_1}\rangle=\alpha$，$\langle\overrightarrow{OP_2},\overrightarrow{OP_3}\rangle=\alpha+2\beta$，故 D 错误.



11. ACD　直线 AB 的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$，即 $x+2y-4=0$，圆 $(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 的圆心 $M(5,5)$，半径为 4，则圆心 M 到直线 AB 的距离为 $\frac{|5+10-4|}{\sqrt{5}}=\frac{11}{\sqrt{5}}$. 因为 $\frac{11}{\sqrt{5}}>4$，所以直线 AB 与圆 M 相

离,故点 P 到直线 AB 的距离的取值范围是 $\left[\frac{11}{\sqrt{5}}-4,\frac{11}{\sqrt{5}}+4\right]$. 对于A,因为 $\frac{11}{\sqrt{5}}+4<\frac{11}{2}+4<10$,故 A 正确. 对于 B,因为 $\frac{11}{\sqrt{5}}-4-2=\frac{11-6\sqrt{5}}{\sqrt{5}}<0$,故 B 错误. 对于 C,如图,当 $\angle PBA$ 最小时,BP 与圆 M 相切,此时 $|BM|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$,所以 $|PB|=\sqrt{34-16}=3\sqrt{2}$,故 C 正确. 对于 D,当 $\angle PBA$ 最大时,BP 也与圆 M 相切,此时 $|PB|=3\sqrt{2}$,故 D 正确.



解后反思 处理与圆有关的最值问题,要能用好图形的几何特征,体现数形结合的思想,切不能盲目地建立函数关系直接求解.

12. BD 对于 A,如图 1,当 $\lambda=1$ 时,因为 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$,所以 $\overrightarrow{CP}=\mu\overrightarrow{BB_1}$,此时点 P 在线段 CC_1 上运动,$\triangle AB_1P$ 的周长不为定值,故 A 错误.

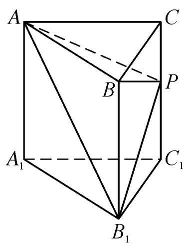


图 1

对于 B,如图 2,当 $\mu=1$ 时,因为 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$,所以 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{BC}$,此时点 P 在线段 B_1C_1 上运动. 因为 $B_1C_1/\!/BC$,$B_1C_1\not\subset$平面 A_1BC,$BC\subset$平面 A_1BC,所以 $B_1C_1/\!/$平面 A_1BC,则点 P 到平面 A_1BC 的距离就是 B_1C_1 到平面 A_1BC 的距离,为定值,所以 $V_{\text{三棱锥}P\text{-}A_1BC}$ 为定值,故 B 正确.

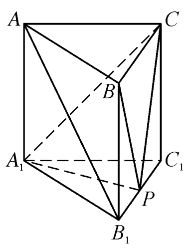


图 2

解法 1(综合法) 对于 C,如图 3,当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时,分别取 BC,B_1C_1 的中点 E,F,则 $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BE}+\mu\overrightarrow{BB_1}$,所以 $\overrightarrow{EP}=\mu\overrightarrow{BB_1}$,则点 P 在线段 EF 上运动. 易知 $A_1F\perp$平面 BB_1C_1C,则 PF 为 A_1P 在平面 BB_1C_1C 内的射影. 要使得 $A_1P\perp BP$,因为 $A_1F\perp$平面 BB_1C_1C,所以 $A_1F\perp BP$. 又 $A_1F\cap A_1P=A_1$,所以 $BP\perp$平面 A_1FP. 所以 $BP\perp PF$. 当点 P 在点 E 位置时,满足题意;当点 P 在点 F 位置时,A_1P 即为 A_1F,又 $A_1F\perp$平面 BB_1C_1C,所以 $A_1F\perp BF$. 故有两个点 P,故 C 错误.

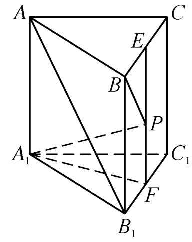


图 3

对于 D,如图 4,当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时,分别取 BB_1,CC_1 的中点 M,N,则 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}$,所以 $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{BC}$,则点 P 在线段 MN 上运动. 设 F 为 B_1C_1 的中点,则 $A_1F\perp$平面 BB_1C_1C,则 BF 为 A_1B 在平面 BB_1C_1C 内的射影. 因为 $A_1B\perp AB_1$,要使得 $A_1B\perp$平面 AB_1P,只要 $A_1B\perp B_1P$,只需 A_1B 在平面 BB_1C_1C 内的射影 BF 与 B_1P 垂直即可,故只有当点 P 与点 N 重合时,满足题意,故 D 正确.

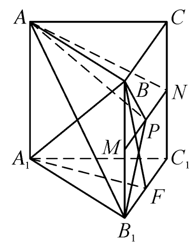


图 4

解法 2(空间向量法) 取 A_1C_1 的中点 O,建立如图 5 所示的空间直角坐标系. 则 $A_1\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$,$A\left(0,-\frac{1}{2},1\right)$,$B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$,$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,1\right)$,$C_1\left(0,\frac{1}{2},0\right)$,$C\left(0,\frac{1}{2},1\right)$. 设 $P(x,y,z)$,则 $\overrightarrow{BP}=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2},y,z-1\right)$,$\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,-1)$. 对于 C,当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时,$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$,则有 $\begin{cases}x-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4},\\ y=\frac{1}{4},\\ z-1=-\mu,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{4},\\ y=\frac{1}{4},\\ z=1-\mu,\end{cases}$ 则 $\overrightarrow{A_1P}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4},1-\mu\right)$,$\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},-\mu\right)$. 由 $A_1P\perp BP$,得 $\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{BP}=-\frac{3}{16}+\frac{3}{16}-\mu(1-\mu)=0$,所以 $\mu=0$ 或 1,满足题意的点 P 有两个,故 C 错误. 对于 D,当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时,$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$,则有 $\begin{cases}x-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\\ y=\frac{1}{2}\lambda,\\ z-1=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\\ y=\frac{1}{2}\lambda,\\ z=\frac{1}{2},\end{cases}$ 则 $\overrightarrow{B_1P}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2}\right)$. 因为 $A_1B\perp AB_1$,要使得 $A_1B\perp$平面 AB_1P,只需 $A_1B\perp B_1P$,又 $\overrightarrow{A_1B}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,所以 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1P}=-\frac{3}{4}\lambda+$

$\frac{\lambda}{4}+\frac{1}{2}=0$,所以 $\lambda=1$,满足题意的点 P 只有 1 个,故 D 正确.

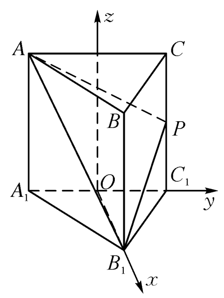


图 5

13. 1　因为 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,即 $(-x)^3(a\cdot 2^{-x}-2^x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 对一切实数 x 恒成立,整理得 $(a-1)(2^x+2^{-x})=0$,故 $a=1$.

14. $x=-\frac{3}{2}$　不妨设点 P 在第一象限,则点 P 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},p\right)$,由题意知 $\triangle OPF\backsim\triangle PQF$,所以 $\frac{|OF|}{|PF|}=\frac{|PF|}{|QF|}$,则 $|QF|=\frac{|PF|^2}{|OF|}=\frac{p^2}{\frac{p}{2}}=6$,所以 $p=3$,故 C 的准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$.

15. 1　$f(x)=\begin{cases}1-2x-2\ln x, 0<x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2x-1-2\ln x, x>\frac{1}{2}.\end{cases}$ 显然当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 单调递减,$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln 2=\ln 4>1$;当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)=2-\frac{2}{x}=\frac{2x-2}{x}$,则当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,且 $f(x)$ 的图象连续,所以 $f(x)_{\min}=f(1)=1$.

16. 5　$720-\frac{240n+720}{2^n}$　当对折 3 次时,有 $\frac{5}{2}$ dm×12 dm,5 dm×6 dm,10 dm×3 dm,20 dm×$\frac{3}{2}$ dm,共 4 种规格的图形;所以当对折 4 次时,有 $\frac{5}{4}$ dm×12 dm,$\frac{5}{2}$ dm×6 dm,5 dm×3 dm,10 dm×$\frac{3}{2}$ dm,20 dm×$\frac{3}{4}$ dm,共 5 种规格的图形. 由题意归纳可得对折 k 次共有 $(k+1)$ 种规格,且每个规格图形的面积为 $\frac{240}{2^k}$,故 $S_k=\frac{240(k+1)}{2^k}$. 设 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2^k}=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}$　①,则 $\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}}$　②. ①−②,得 $\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=1+\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$,所以 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}$,则 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=240T_n=720-\frac{240n+720}{2^n}$.

17. 解:(1)$b_1=a_2=a_1+1=2$,$a_3=a_2+2=4$,$b_2=a_4=a_3+1=5$.

【启发式分析】 欲求 $\{b_n\}$ 的通项公式,需探究相邻两项 b_{n+1} 与 b_n 的关系.

$b_{n+1}-b_n=a_{2n+2}-a_{2n}=(a_{2n+1}+1)-a_{2n}=a_{2n}+3-a_{2n}=3$,所以数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项,3 为公差的等差数列,所以 $b_n=2+(n-1)\times3=3n-1$.

(2)当 n 为奇数时,$a_n=a_{n+1}-1$,

【启发式分析】 由于奇数项和偶数项表达式不同,故需分组求和.

所以 $\{a_n\}$ 的前 20 项和为 $a_1+a_2+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})=[(a_2-1)+(a_4-1)+\cdots+(a_{20}-1)]+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})=2(a_2+a_4+\cdots+a_{20})-10$. 由(1)可知,$a_2+a_4+\cdots+a_{20}=b_1+b_2+\cdots+b_{10}=2\times10+\frac{10\times9}{2}\times3=155$. 所以 $\{a_n\}$ 的前 20 项和为 $2\times155-10=300$.

易错警示 第(1)问求解数列 $\{b_n\}$ 的通项公式时,不能由前几项直接归纳出通项公式,需要结合等差数列的定义进行证明,确定 $\{b_n\}$ 为等差数列,进而求得通项公式.

18. 解:(1)X 的所有可能取值为 0,20,100,$P(X=0)=1-0.8=0.2$,$P(X=20)=0.8\times(1-0.6)=0.32$,$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$,所以 X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

(2)假设先答 B 类题,得分为 Y,则 Y 的可能取值为 0,80,100,$P(Y=0)=1-0.6=0.4$,$P(Y=80)=0.6\times(1-0.8)=0.12$,$P(Y=100)=0.6\times0.8=0.48$,所以 Y 的分布列为

Y	0	80	100
P	0.4	0.12	0.48

所以 $E(Y)=0\times0.4+80\times0.12+100\times0.48=57.6$. 由(1)可知 $E(X)=0\times0.2+20\times0.32+100\times0.48=54.4$,所以 $E(Y)>E(X)$,所以应先答 B 类题.

19. (1)**证明**:在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin C}$　①.[1]

因为 $BD\sin\angle ABC=a\sin C$,所以 $\frac{BD}{\sin C}=\frac{a}{\sin\angle ABC}$　②. 联立①②得 $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{a}$,即 $ac=b\cdot BD$. 因为 $b^2=ac$,所以 $BD=b$.

(2)**解法 1**　若 $AD=2DC$,则 $CD=\frac{1}{3}AC=\frac{1}{3}b$.

【启发式分析】 根据 $AD=2DC$,运用两次余弦定理可得到 a,b,c 的关系式.

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. 在 $\triangle BCD$ 中,由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2-b^2}{2\cdot a\cdot\frac{b}{3}}$,所以 $a^2+b^2-c^2=3\left[a^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2-b^2\right]$,所以 $2a^2-\frac{11}{3}b^2+c^2=0$. 因为 $b^2=ac$,所以 $6a^2-11ac+3c^2=0$,即 $a=\frac{c}{3}$ 或 $a=\frac{3}{2}c$. 若 $a=\frac{c}{3}$,则 $b^2=ac=\frac{c^2}{3}$,所以 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}c$,此时 $a+b=\frac{\sqrt{3}+1}{3}c<c$,舍去;

【启发式分析】 结合 $b^2=ac$,可以用一个变量 c 表示出 a,b,再运用余弦定理可得 $\cos\angle ABC$.

若 $a=\frac{3}{2}c$,则 $b^2=ac=\frac{3}{2}c^2$,所以由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{7}{12}$.

解法 2 【启发式分析】抓住(1)中结论 $BD=b$,通过向量的线性运算以及模的运算,得到 a,b,c 的关系式.

由题意可得 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$,所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$,所以 $\overrightarrow{BD}^2=\frac{4}{9}\overrightarrow{BC}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{9}\overrightarrow{BA}^2$. 由(1)知,$BD=b$,所以 $b^2=\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9}c^2+\frac{4}{9}ac\cos\angle ABC$. 又 $b^2=ac$,所以 $9ac=4a^2+c^2+4ac\cos\angle ABC$ ③. 由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC$. 又 $b^2=ac$,所以 $ac=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC$ ④.

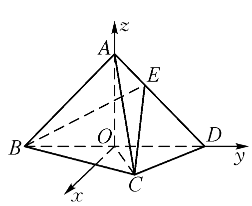
【启发式分析】根据③④式,可以得到关于 $\frac{c}{a}$ 以及 $\cos\angle ABC$ 的方程组,进而得到 $\cos\angle ABC$ 的值.

由③-④,得 $8ac=3a^2+6ac\cos\angle ABC$,所以 $\cos\angle ABC=\frac{8ac-3a^2}{6ac}=\frac{4}{3}-\frac{a}{2c}$. 由③④分别除以 ac 可得 $\begin{cases}9=4\cdot\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+4\cos\angle ABC,\\1=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\cos\angle ABC,\end{cases}$ 消去 $\cos\angle ABC$ 有 $11=6\cdot\frac{a}{c}+3\cdot\frac{c}{a}$. 所以 $6\left(\frac{a}{c}\right)^2-11\cdot\frac{a}{c}+3=0$,所以 $\frac{a}{c}=\frac{3}{2}$ 或 $\frac{a}{c}=\frac{1}{3}$. 则 $\cos\angle ABC=\frac{7}{12}$ 或 $\cos\angle ABC=\frac{7}{6}$(舍去),所以 $\cos\angle ABC=\frac{7}{12}$.

规范书写 【1】需说明由正弦定理得.

20. (1)**证明**:因为 $AB=AD$,O 为 BD 的中点,所以 $AO\perp BD$. 因为 $AO\subset$ 平面 ABD,平面 $ABD\perp$ 平面 BCD 且平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$,所以 $AO\perp$ 平面 BCD. 又 $CD\subset$ 平面 BCD,所以 $AO\perp CD$.

(2)**解**:以 O 为坐标原点,OD 所在直线为 y 轴,OA 所在直线为 z 轴,垂直 OD 且过点 O 的直线为 x 轴,建立如图所示的空间直角坐标系. 设 $OA=m(m>0)$,所以有 $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,$D(0,1,0)$,$B(0,-1,0)$,$A(0,0,m)$,$E\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}m\right)$,所以 $\overrightarrow{EB}=\left(0,-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}m\right)$,$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$. 设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 EBC 的法向量,所以 $\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\boldsymbol{n}_1=-\frac{4}{3}y_1-\frac{2}{3}mz_1=0,\\\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}_1=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{3}{2}y_1=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2y_1+mz_1=0,\\x_1+\sqrt{3}y_1=0.\end{cases}$ 令 $y_1=1$,所以 $z_1=-\frac{2}{m}$,$x_1=-\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{n}_1=\left(-\sqrt{3},1,-\frac{2}{m}\right)$. 平面 BCD 的一个法向量为 $\overrightarrow{OA}=(0,0,m)$,由题意有 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\overrightarrow{OA}\rangle|=\left|\frac{-2}{m\cdot\sqrt{4+\frac{4}{m^2}}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $m=1$(舍负),所以 $OA=1$. 因为 $S_{\triangle OCD}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$,所以 $S_{\triangle BCD}=2S_{\triangle OCD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $V_{三棱锥A\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCD}\cdot OA=\frac{\sqrt{3}}{6}$.



21. 解:(1)因为 $|MF_1|-|MF_2|=2$,所以轨迹 C 为双曲线右半支,设轨迹 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(x>0)$,所以有 $c^2=17$,$2a=2$,所以 $a^2=1$,$b^2=16$,所以 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{16}=1(x>0)$.

(2)设 $T\left(\frac{1}{2},n\right)$,直线 AB 的方程为 $y-n=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right)$,联立 $\begin{cases}y-n=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right),\\x^2-\frac{y^2}{16}=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $(16-k_1^2)x^2+(k_1^2-2k_1n)x-\frac{1}{4}k_1^2-n^2+k_1n-16=0$. 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,所以 $x_1+x_2=\frac{k_1^2-2k_1n}{k_1^2-16}$,$x_1x_2=\frac{\frac{1}{4}k_1^2+n^2-k_1n+16}{k_1^2-16}$. 又 $|TA|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)$,$|TB|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)$,所以 $|TA|\cdot|TB|=(1+k_1^2)\cdot\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)=(1+k_1^2)\left[x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}\right]=(1+k_1^2)\left(\frac{\frac{1}{4}k_1^2+n^2-k_1n+16}{k_1^2-16}-\frac{1}{2}\cdot\frac{k_1^2-2k_1n}{k_1^2-16}+\frac{1}{4}\right)=\frac{(n^2+12)(1+k_1^2)}{k_1^2-16}$.

设 $PQ:y-n=k_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$,同理 $|TP|\cdot|TQ|=\frac{(n^2+12)(1+k_2^2)}{k_2^2-16}$.

因为 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$,所以 $\frac{1+k_1^2}{k_1^2-16}=\frac{1+k_2^2}{k_2^2-16}$,即 $1+\frac{17}{k_1^2-16}=1+\frac{17}{k_2^2-16}$,所以 $k_1^2-16=k_2^2-16$,即 $(k_1+k_2)(k_1-k_2)=0$. 因为 $k_1\neq k_2$,所以 $k_1+k_2=0$.

22. (1)**解**:由题意知 $x\in(0,+\infty)$,[1]所以 $f'(x)=1-\ln x-1=-\ln x$. 所以当 $x\in(0,1)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增,$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减.

(2)**证明**:由 $b\ln a-a\ln b=a-b$,得 $-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ln\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$,即 $\frac{1}{a}\left(1-\ln\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{b}\left(1-\ln\frac{1}{b}\right)$.

【启发式分析】观察结构特征,可以考虑运用换元法,简化表达式.

令 $x_1=\frac{1}{a}$,$x_2=\frac{1}{b}$,则 $x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)$,所以 x_1,x_2 为 $f(x)=k$ 的两根. 由(1)知 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极大值,也是最大值,且 $f(1)=1$,所以 $f(x)=k$ 有两根,必有 $k<1$. 又因为 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,所以必有一根在$(0,1)$上,一根在$(1,+\infty)$上. 当 $x\in(0,1)$时,$x>0$,$\ln x<0$,$1-\ln x>0$,所以 $f(x)>0$,故必有 $k>0$,所以 $k\in(0,1)$,令 $f(x)>0$,由 $x>1$有 $1-\ln x>0$,即 $\ln x<1$,故 $1<x<\mathrm{e}$. 不妨令 $x_1\in(0,1)$,$x_2\in(1,\mathrm{e})$,则 $2-x_1>1$. 先证 $x_1+x_2>2$,即证 $x_2>2-x_1$,

【启发式分析】x_2,$2-x_1$ 同在区间$(1,\mathrm{e})$上,结合 $f(x_1)=f(x_2)$,可以利用 $f(x)$的单调性证明上述结论.

即证 $f(x_2)=f(x_1)<f(2-x_1)$. 令 $h(x)=f(x)-f(2-x)$,则 $h'(x)=f'(x)+f'(2-x)=-\ln x-\ln(2-x)=-\ln[x(2-x)]$. 因为 $x\in(0,1)$,所以 $x(2-x)\in(0,1)$,所以 $h'(x)>0$ 恒成立,所以 $h(x)$单调递增,所以 $h(x)<h(1)=0$,所以 $f(x_1)<f(2-x_1)$,所以 $x_1+x_2>2$ 得证. 再证 $x_1+x_2<\mathrm{e}$.

证法 1　因为 $x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,\mathrm{e})$，所以 $x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)>x_1$. 要证明 $x_1+x_2<\mathrm{e}$，只要证 $x_2(1-\ln x_2)+x_2<\mathrm{e}$. 令 $g(x)=x(1-\ln x)+x$，$1<x<\mathrm{e}$，所以 $g'(x)=1-\ln x-1+1=1-\ln x>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增，所以 $g(x)<g(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，则 $g(x_2)<\mathrm{e}$，得证. 所以 $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\mathrm{e}$.

证法 2　**【启发式分析】**出现双变量，且无法直接得到 x_1，x_2 的关系，可以考虑设比值 $\frac{x_2}{x_1}=t$，引入新元 t，实现减元.

再证 $x_1+x_2<\mathrm{e}$，不妨设 $x_2=tx_1$，则 $t>1$. 由 $x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)$ 可得 $x_1(1-\ln x_1)=tx_1[1-\ln(tx_1)]$，化简可得 $\ln x_1=1-\frac{t\ln t}{t-1}$.

【启发式分析】用新元 t，表示出 x_1+x_2，再构造函数，通过导数法可得结论.

而 $x_1+x_2<\mathrm{e}$ 等价于 $(1+t)x_1<\mathrm{e}$ 等价于 $\ln(1+t)+\ln x_1<1$ 等价于 $\ln(1+t)+1-\frac{t\ln t}{t-1}<1$ 等价于 $\frac{\ln(1+t)}{t}<\frac{\ln t}{t-1}$. 令 $p(t)=\frac{\ln t}{t-1}$，则 $p'(t)=\frac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}$，再令 $\varphi(t)=1-\frac{1}{t}-\ln t$，则 $\varphi'(t)=\frac{1-t}{t^2}<0$，故 $\varphi(t)<\varphi(1)=0$，则 $p'(t)<0$，故 $p(t)$ 在定义域内单调递减，则 $p(t+1)<p(t)$，即 $\frac{\ln(1+t)}{t}<\frac{\ln t}{t-1}$，则 $x_1+x_2<\mathrm{e}$ 得证. 所以 $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\mathrm{e}$.

规范书写　**【1】**需说明定义域，否则扣 1 分.

解后反思　导数相关的不等式的证明，往往需要合理地构造函数，通过导数法研究函数的单调性，进而证得结论. 本题属于极值点偏移问题，其中 $x_1+x_2>2$ 的证明，1 恰为函数 $f(x)$ 的极值点，处理方法往往是将其转化，转化到同一单调区间上，再通过单调性证得结论. 而证明 $x_1+x_2<\mathrm{e}$，出现了双元变量，由于无法直接得到 x_1，x_2 的关系，往往运用放缩消元，或者引入新元法，转化为单变量来处理.

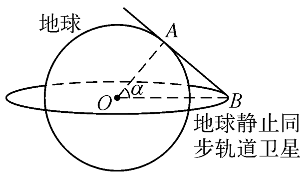
2021 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅱ

1. A　对应点坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，位于第一象限.

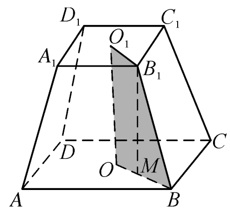
2. B　$\complement_U B=\{1,5,6\}$，则 $A\cap\complement_U B=\{1,6\}$.

3. B　抛物线的焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，则焦点到直线 $y=x+1$ 的距离 $d=\frac{\left|\frac{p}{2}+1\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，则 $p=2$.

4. C　作出静止同步轨道卫星轨道的截面图，如图所示，则 $OB=36000+6400=42400$，所以 $\cos\alpha=\frac{6400}{42400}=\frac{8}{53}$，则 S 占地球表面积的百分比为 $\frac{2\pi r^2(1-\cos\alpha)}{4\pi r^2}=\frac{45}{106}\approx42\%$.



5. C　如图所示，正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O_1，O 分别为上、下两个底面的中心，在直角梯形 OBB_1O_1 内，作 $B_1M\perp OB$，垂足为 M，则 $BM=OB-O_1B_1=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$，所以 $O_1O=B_1M=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，体积为 $\frac{1}{3}\times h\times(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}})=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times(4+16+\sqrt{4\times16})=\frac{28\sqrt{2}}{3}$.



6. D　σ 越小，正态分布的图象越瘦长，总体分布越集中在对称轴附近，故 A 正确；因为 $\mu=10$，所以根据正态分布图象的对称性，知选项 B，C 正确；根据正态分布图象的对称性，知测量结果落在 $(9.9,10.2)$ 内和 $(10,10.3)$ 的概率不相等，故 D 错误.

7. C　因为 $a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}=c$，$b=\log_8 3>\log_8\sqrt{8}=\frac{1}{2}=c$，所以 $a<c<b$.

解后反思　比较指数式或对数式的大小，往往利用指数函数或对数函数的单调性，当底数不相同时，往往引入中间量.

8. B　**解法 1（函数性质法）**　因为 $f(x+2)$ 为偶函数，所以 $f(-x+2)=f(x+2)$　①. 又 $f(2x+1)$ 为奇函数，所以 $f(-2x+1)=-f(2x+1)$. 令 $-2x+1=t$，则 $f(t)=-f(2-t)$，即 $f(x)=-f(2-x)$　②，所以 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，则 $f(x)$ 的周期为 4. 由②知，$f(1)=-f(1)$，故 $f(1)=0$，对于①，令 $x=1$，得 $f(3)=f(1)=0$，所以 $f(-1)=f(3)=0$，其他 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$f(2)$，$f(4)$ 无法确定是否为 0.

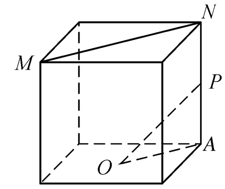
解法 2（特殊函数模拟法）　**【启发式分析】**形如 $y=\cos\omega x$ 的函数为偶函数，且 $y=\cos\left(\omega x+\frac{k\pi}{2}\right)$（$k$ 为奇数）为奇函数，可以想到构造余弦型函数.

构造 $f(x)=\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-2)\right]$，满足题意，则 $f(-1)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$f(2)$，$f(4)$ 均不为 0.

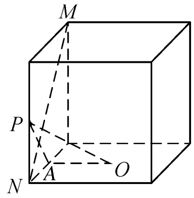
解后反思　有关抽象函数求值，通常有两种方法. 其一，研究函数的奇偶性、周期性、对称性等性质，再通过赋值法，并结合函数性质转化后求解；其二，根据题中所给条件，寻找满足题意的特殊函数进行求解.

9. AC　标准差和极差能度量样本的离散程度，而中位数表示按照从小到大顺序排列后，中间一个数或两个数平均数，平均数度量平均值的大小，显然两者不能度量样本的离散程度.

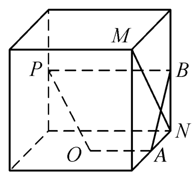
10. BC　如图，$MN\parallel OA$，显然 OP 与 OA 不垂直，则 MN 与 OP 不垂直，故 A 错误；



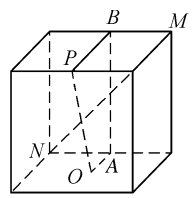
设 A 为正方体棱上的中点，则 $MN\perp PA$，又 $OA\perp$ 平面 AMN，所以 $OA\perp MN$，又 $PA\cap OA=A$，所以 $MN\perp$ 平面 PAO，又 $OP\subset$ 平面 PAO，所以 $MN\perp OP$，故 B 正确；



设 A,B 为正方体棱上的中点，易得 $OA\perp MN$，又 $AB\perp MN$，$AB\cap OA=A$，所以 $MN\perp$ 平面 $POAB$，又 $OP\subset$ 平面 $POAB$，所以 $MN\perp OP$，故 C 正确；



设 A,B 为正方体棱上的中点，则易得 $OA\perp MN$，若 $OP\perp MN$，又 $OP\cap AO=O$，所以 $MN\perp$ 平面 $POAB$，又 $AB\subset$ 平面 $POAB$，所以 $MN\perp AB$，显然不成立，故 D 错误.



11. ABD　因为点 A 在圆 C 上，所以 $a^2+b^2=r^2$，圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$，所以直线 l 与圆 C 相切，A 正确. 因为点 A 在圆 C 内，所以 $a^2+b^2<r^2$，圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}>r$，所以直线 l 与圆 C 相离，B 正确. 因为点 A 在圆 C 外，所以 $a^2+b^2>r^2$，圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}<r$，所以直线 l 与圆 C 相交，C 错误. 因为点 A 在直线 l 上，所以 $a^2+b^2=r^2$，圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$，所以直线 l 与圆 C 相切，D 正确.

12. ACD　**【启发式分析】** $\omega(n)$ 是一个以 n 为自变量的函数，利用题目所给的条件对四个选项逐一考查，注意到已证明为真的选项要为后面选项的判断提供依据.

令 $n=a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2+\cdots+a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+a_k\cdot 2^k$，则 $2n=0\cdot 2^0+a_0\cdot 2^1+a_1\cdot 2^2+\cdots+a_{k-1}\cdot 2^k+a_k\cdot 2^{k+1}$，$\omega(2n)=0+a_0+a_1+\cdots+a_k=\omega(n)$，A 正确. 下证明：若 n 为偶数 $(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\omega(n+1)=\omega(n)+1$. 证明：因为 n 为偶数，所以 $n=a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2+\cdots+a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+a_k\cdot 2^k$，则 $n+1=1+a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2+\cdots+a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+a_k\cdot 2^k$，所以 $\omega(n)=a_0+a_1+\cdots+a_k$，$\omega(n+1)=1+a_0+a_1+\cdots+a_k=\omega(n)+1$. 选项 B，取 $n=2$ 可排除. 或者 $\omega(2n+3)=\omega[2(n+1)+1]=\omega[2(n+1)]+1=\omega(n+1)+1$，不能保证与 $\omega(n)+1$ 恒等，B 错误. 选项 C，$\omega(8n+5)=\omega(8n+4+1)=\omega(8n+4)+1=\omega(2n+1)+1=\omega(2n)+2=\omega(n)+2$；$\omega(4n+3)=\omega(4n+2)+1=\omega(2n+1)+1=\omega(n)+2$，C 正确. 选项 D，当 $n\geqslant 2$ 时，$\omega(2^{n+1}-1)=\omega[2(2^n-1)+1]=\omega[2(2^n-1)]+1=\omega(2^n-1)+1$. 又因为 $\omega(3)=2$，$\omega(1)=1$，所以 $\omega(3)=\omega(1)+1$. 即 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 有 $\omega(2^{n+1}-1)=\omega(2^n-1)+1$，所以 $\{\omega(2^n-1)\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，所以 $\omega(2^n-1)=n$，D 正确.

解后反思　$a_0,a_1,\cdots,a_k$ 实际上是 n 的二进位制数从右到左的各位数字，显然当 n 为偶数时，最后一位数字为 0，所以 $n+1$ 最后一位数字变为 1，其余各数不变，故 $\omega(n+1)=\omega(n)+1$，而当 n 为奇数时，最后一位数字为 1，加 1 后由于进位的影响，$\omega(n+1)$ 与 $\omega(n)$ 没有确定关系.

13. $y=\pm\sqrt{3}x$　$\dfrac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}=\sqrt{3}$.

14. $f(x)=x^2$　本题属于开放性问题，答案不唯一. 例如取 $f(x)=x^2,x^4,x^6\cdots$ 都可以，还可以取 $f(x)=x^{\frac{2}{3}},x^{\frac{4}{3}},x^{\frac{2}{5}},x^{\frac{4}{5}}\cdots$

15. $-\dfrac{9}{2}$　**解法 1**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0$，所以 $2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})+9=0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{9}{2}$.

解法 2　由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，得 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}^2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$. 由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}$，得 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}^2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{1}{2}$. 由 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}^2$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{7}{2}$. 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{9}{2}$.

16. $(0,1)$　$f(x)=\begin{cases}-e^x+1, & x<0,\\ e^x-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 由已知可得 $-e^{x_1}\cdot e^{x_2}=-1$，所以 $x_1+x_2=0$. 由弦长公式得 $|AM|=\sqrt{1+e^{2x_1}}\,|x_1|$，$|BN|=\sqrt{1+e^{2x_2}}\,|x_2|$，故 $\dfrac{|AM|}{|BN|}=\sqrt{\dfrac{1+e^{2x_1}}{1+e^{-2x_1}}}=e^{x_1}\in(0,1)$.

17. 解：(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d.[1] 因为 $S_5=5a_3=a_3$，所以 $a_3=0$，所以 $S_4=2(a_2+a_3)=2a_2$. 因为 $a_2a_4=S_4$，所以 $a_2a_4=2a_2$. 由公差 $d\neq 0$ 及 $a_3=0$ 知 $a_2\neq 0$，所以 $a_4=2$，$d=2$，则 $a_n=a_3+2(n-3)=2n-6$.

(2) $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(-4+2n-6)}{2}=n^2-5n$，由 $S_n>a_n$，得 $n^2-5n>2n-6$，即 $(n-1)(n-6)>0$，解得 $n<1$ 或 $n>6$. 因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 n 的最小值为 7.

规范书写【1】需设出数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，不能直接写 d.

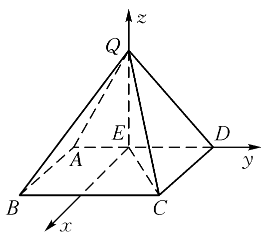
18. 解：(1)由 $2\sin C=3\sin A$ 及正弦定理可得 $2c=3a$，结合 $b=a+1$，$c=a+2$，解得 $a=4$，$b=5$，$c=6$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{16+25-36}{40}=\dfrac{1}{8}$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 4\times 5\times\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$.

(2)设存在正整数 a 满足条件，由已知 $c>b>a$，所以 C 为钝角. 所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，即 $a^2+b^2<c^2$，即 $a^2+(a+1)^2<(a+2)^2$，得 $(a+1)(a-3)<0$. 因为 a 为正整数，所以 $a=1$ 或 2. 当 $a=1$ 时，$b=2$，$c=3$，不能构成三角形，舍去. 当 $a=2$ 时，$b=3$，$c=4$，满足条件. 综上，当 $a=2$ 时，$\triangle ABC$ 为钝角三角形.

易错警示 由角 C 的余弦为负求出 a 的值为 1 或 2 时，容易忽视验证三角形的存在性导致错误.

19. (1)**证明**：取 AD 的中点 E，连接 QE，CE. 因为 $QD=QA=\sqrt{5}$，所以 $QE\perp AD$. 因为 $AD=2$，所以 $DE=1$，所以 $QE=\sqrt{5-1}=2$，$CE=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，所以 $QE^2+CE^2=9=QC^2$，所以 $QE\perp CE$. 又因为 $AD\cap CE=E$，所以 $QE\perp$ 平面 $ABCD$.[1] 因为 $QE\subset$ 平面 QAD，所以平面 $QAD\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)**解法 1** 如图，取 BC 中点 F，连接 EF. 分别以 EF，ED，EQ 所在的直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系. 则 $B(2,-1,0)$，$Q(0,0,2)$，$D(0,1,0)$，所以 $\overrightarrow{BQ}=(-2,1,2)$，$\overrightarrow{QD}=(0,1,-2)$，设平面 BQD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_0,y_0,z_0)$，所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{QD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x_0+y_0+2z_0=0,\\ y_0-2z_0=0,\end{cases}$ 取 $z_0=1$，所以 $y_0=x_0=2$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(2,2,1)$，而平面 QDA 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$. 设二面角 $B-QD-A$ 的平面角为 θ，显然 θ 为锐角，[2] 所以 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{2}{3}$. 所以二面角 $B-QD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$.



解法 2 由(1)知平面 $QAD\perp$ 平面 $ABCD$，又因为 $BA\perp AD$，$BA\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $QAD=AD$，所以 $BA\perp$ 平面 QAD. 过点 A 作 $AM\perp QD$ 于点 M，连接 BM，则 $\angle AMB$ 即为所求二面角的平面角. 由题易知 $BA\perp AM$. 而 $S_{\triangle QAD}=\dfrac{1}{2}\times2\times2=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\cdot AM$，得 $AM=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$，所以 $BM=\sqrt{AB^2+AM^2}=\sqrt{4+\dfrac{16}{5}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$，所以 $\cos\angle AMB=\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{6}{\sqrt{5}}}=\dfrac{2}{3}$. 所以二面角 $B-QD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

规范书写【1】运用线面垂直的判定定理，条件需写全，否则扣分.
【2】需先判断二面角为锐角.

20. (1)**解**：由题意知 $\begin{cases}c=\sqrt{2},\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\end{cases}$ 得 $a=\sqrt{3}$，又因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=1$. 故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)**证明**：先证必要性：当 M，N，F 三点共线时，设直线 MN 的方程为 $x=my+\sqrt{2}$.[1] 圆心 $O(0,0)$ 到直线 MN 的距离 $d=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+1}}=1$，解得 $m^2=1$. 联立 $\begin{cases}x=my+\sqrt{2},\\ x^2+3y^2=3,\end{cases}$ 消去 x 得 $(m^2+3)y^2+2\sqrt{2}my-1=0$，即 $4y^2+2\sqrt{2}my-1=0$，所以 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\cdot\dfrac{\sqrt{8m^2+16}}{4}=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{24}}{4}=\sqrt{3}$，所以必要性成立. 再证充分性：当 $|MN|=\sqrt{3}$ 时，设直线 MN 的方程为 $x=ty+m$，此时圆心 $O(0,0)$ 到直线 MN 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{t^2+1}}=1$，所以 $m^2-t^2=1$. 联立 $\begin{cases}x=ty+m,\\ x^2+3y^2=3,\end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2+3)y^2+2tmy+m^2-3=0$，$\Delta=4t^2m^2-4(t^2+3)(m^2-3)=12(t^2-m^2+3)=24$. $|MN|=\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{\sqrt{24}}{t^2+3}=\sqrt{3}$，得 $t^2=1$，所以 $m^2=2$. 又直线 MN 与曲线 $x^2+y^2=b^2(x>0)$ 相切，所以 $m>0$，$m=\sqrt{2}$，所以直线 MN 的方程为 $x=ty+\sqrt{2}$，恒过点 $F(\sqrt{2},0)$，所以 M，N，F 三点共线，充分性成立. 综上，M，N，F 三点共线的充要条件是 $|MN|=\sqrt{3}$.

规范书写【1】对于需要证明的必要性应先指出来.

21. (1)**解**：$E(X)=0\times0.4+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.1=1$.

(2)**证法 1** $p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3-x=0$，$x>0$. 令 $f(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3-x$，$f'(x)=p_1+2p_2x+3p_3x^2-1$，$f''(x)=2p_2+6p_3x\geqslant0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ①当 $E(X)=p_1+2p_2+3p_3\leqslant1$ 时，当 $x\in(0,1]$ 时，$f'(x)\leqslant f'(1)=p_1+2p_2+3p_3-1\leqslant0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，又 $f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x\in(0,1]$ 上有唯一零点 $x=1$，即 $p=1$. ②当 $E(X)=p_1+2p_2+3p_3>1$ 时，注意到 $f'(0)=p_1-1<0$，$f'(1)=p_1+2p_2+3p_3-1>0$，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以存在唯一 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$. 当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x_0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增. 又 $f(0)=p_0>0$，$f(x_0)<f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上有唯一零点 x_1，所以 $p=x_1<1$.

证法 2 由题意知 $p_0+p_1+p_2+p_3=1$，$E(X)=p_1+2p_2+3p_3$. 由 $p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x$ 得 $p_0+p_2x^2+p_3x^3-(1-p_1)x=0$. 所以 $p_0+p_2x^2+p_3x^3-(p_0+p_2+p_3)x=0$，即 $p_0(1-x)+p_2x(x-1)+p_3x(x-1)(x+1)=0$，所以 $(x-1)[p_3x^2+(p_2+p_3)x-p_0]=0$. 令 $f(x)=p_3x^2+(p_2+p_3)x-p_0$，$f(x)$ 的对称轴为 $x=-\dfrac{p_2+p_3}{2p_3}<0$. 注意到 $f(0)=-p_0<0$，$f(1)=2p_3+p_2-p_0=p_1+2p_2+3p_3-1=E(X)-1$. 所以当 $E(X)\leqslant1$ 时，$f(1)\leqslant0$，$f(x)$ 的正实数根 $x_0\geqslant1$，原方程的最小正实数根 $p=1$；当 $E(X)>1$ 时，$f(1)>0$，$f(x)$ 的正实数根 $x_0<1$，原方程的最小正实数根 $p=x_0<1$.

(3)**解**：当 1 个微生物个体繁殖下一代的期望小于等于 1 时，这种微生物经过多代繁殖后临近灭绝；当 1 个微生物个体繁殖下一代的期望大于 1 时，这种微生物经过多代繁殖后还有继续繁殖的可能.

22. (1)【**启发式分析**】判断单调性，可考察导函数的符号. 令 $f'(x)=x(e^x-2a)=0$，根据 $e^x-2a=0$ 是否有解分 $a\leqslant0$ 与 $a>0$ 两种情况. 当 $a>0$ 时，解得 $x_1=0$，$x_2=\ln 2a$. 两个根的大小关系未知，因此分 $\ln 2a<0$，$\ln 2a=0$，$\ln 2a>0$ 三种情况讨论.
(2)由(1)中的结果，可得函数的单调性，利用条件判断极值的符号，再利用函数零点存在定理进行判断.

解：$f'(x)=xe^x-2ax=x(e^x-2a)$. ①当 $a\leqslant0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$. 所以当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ②当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=\ln 2a<0$. 所以当 $x<\ln 2a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $\ln 2a<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ③当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)=x(e^x-1)\geqslant0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$

上单调递增. ④当 $a>\frac{1}{2}$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x_1=0,x_2=\ln 2a>0$. 所以当 $x<0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当 $0<x<\ln 2a$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当 $x>\ln 2a$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

(2)**证明**:若选①,由(1)知 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,在$(0,\ln 2a)$上单调递减,在$(\ln 2a,+\infty)$上单调递增.

【启发式分析】需要在$(-\infty,0)$上找一个取值为负的点.$(x-1)e^x-ax^2+b<0$,只需$-ax^2+b\leqslant 0$,即 $x\leqslant-\sqrt{\frac{b}{a}}$. 取 $x=-\sqrt{\frac{b}{a}}$ 即可.

又 $f\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}-1\right)e^{-\sqrt{\frac{b}{a}}}<0$,$f(0)=b-1>2a-1>0$,所以 $f(x)$在$\left(-\sqrt{\frac{b}{a}},0\right)$上有一个零点. $f(\ln 2a)=(\ln 2a-1)\cdot 2a-a\cdot(\ln 2a)^2+b>2a\ln 2a-2a-a(\ln 2a)^2+2a=a\ln 2a(2-\ln 2a)$,由$\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e^2}{2}$得 $0<\ln 2a\leqslant 2$,所以 $a\ln 2a(2-\ln 2a)\geqslant 0$,所以 $f(\ln 2a)>0$,当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant f(\ln 2a)>0$,此时 $f(x)$无零点. 综上,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上仅有一个零点 x_0,且 $x_0\in\left(-\sqrt{\frac{b}{a}},0\right)$. 若选②,则由(1)知 $f(x)$在$(-\infty,\ln 2a)$上单调递增,在$(\ln 2a,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增. $f(\ln 2a)=(\ln 2a-1)\cdot 2a-a(\ln 2a)^2+b\leqslant 2a\ln 2a-2a-a(\ln 2a)^2+2a=a\ln 2a(2-\ln 2a)$. 因为 $0<a<\frac{1}{2}$,所以 $\ln 2a<0$,所以 $a\ln 2a(2-\ln 2a)<0$,所以 $f(\ln 2a)<0$,所以当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant f(\ln 2a)<0$,此时 $f(x)$无零点. 当 $x>0$ 时,$f(x)$单调递增,注意到 $f(0)=b-1\leqslant 2a-1<0$,

【启发式分析】需要在$(0,+\infty)$上找一个取值为正的点.$(x-1)e^x-ax^2+b>0$,考虑到放缩的需要,设 $x-1>0$ 比较好. 则只需要$(x-1)(x+1)-ax^2+b>0$,即 $x^2>\frac{1-b}{1-a}$,即 $x>\sqrt{\frac{1-b}{1-a}}$. 又 $x>1$,所以取$\sqrt{\frac{1-b}{1-a}}+1$.

取 $c=\sqrt{\frac{1-b}{1-a}}+1$,因为 $b\leqslant 2a<1$,所以 $c>1$,又可证 $e^c>c+1$. 所以 $f(c)=(c-1)e^c-ac^2+b>(c-1)(c+1)-ac^2+b=(1-a)c^2+b-1=1-b+1-a+b-1>0$. 所以 $f(x)$在$(0,c)$上有唯一零点,即 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一零点.[1]综上,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上有唯一零点.

规范书写【1】利用函数零点存在定理解题时,判断函数单调性后,还得找出 $f(x_1)f(x_2)<0$,才能判断有唯一零点.

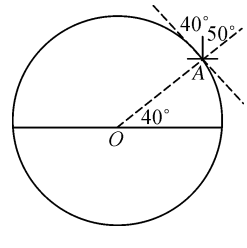
2020 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅰ

1. C $A\cup B=\{x|1\leqslant x<4\}$.

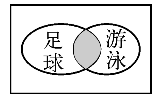
2. D $\frac{2-i}{1+2i}=\frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{-5i}{5}=-i$.

3. C 不同的安排方法共有 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$ 种.

4. B OA 与赤道所在平面所成角为 40°,而晷面与赤道所在平面平行,所以 OA 与晷面所成角为 40°,而晷针与晷面垂直,所以 OA 与晷针所成角为 50°. 又因为点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面,所以晷针与点 A 处的水平面所成角为 40°.

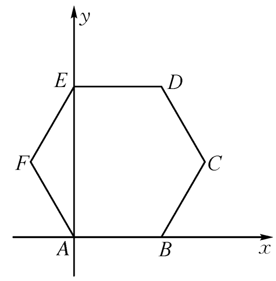


5. C 作出韦恩图,阴影部分表示既喜欢足球又喜欢游泳的学生,根据题意知既喜欢足球又喜欢游泳的学生所占的百分比为 60%+82%−96%=46%.

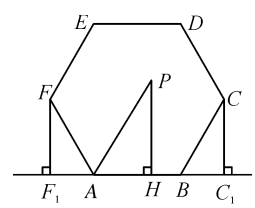


6. B 因为 $R_0=1+rT$,且 $R_0=3.28$,$T=6$,所以 $3.28=1+6r$,则 $r=0.38$,则 $I(t)=e^{0.38t}$,令 $I(t)=e^{0.38t}=2$,等式两边同时取自然对数,得 $0.38t=\ln 2\approx 0.69$,所以 $t\approx 1.8$(天).

7. A **解法 1(坐标法)** 以 A 为坐标原点,AB 所在直线为 x 轴,AE 所在直线为 y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系. 则 $A(0,0)$,$B(2,0)$,设 $P(x,y)$,则$-1<x<3$,所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2x\in(-2,6)$.

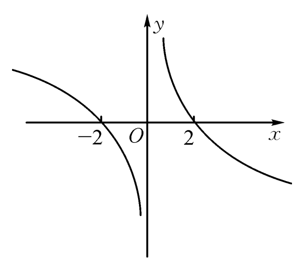


解法 2(投影法) 如图,过点 P 作直线 AB 的垂线,垂足为 H,则点 H 只能为线段 F_1C_1 上不包含两个端点的点,则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HP})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$. 当 P 在点 F 处时,即 H 在点 F_1 处时,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=-1\times 2=-2$. 当 P 在点 C 处时,即点 H 在点 C_1 处时,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times 2=6$. 又点 P 在正六边形的内部,不含边界,所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}\in(-2,6)$.



解后反思 平面向量数量积的运算常用坐标法和基底法,此外还要注意数量积的几何意义,即投影法的应用. 本题解法 2 巧用投影法,解法简洁,解法 1 属于一般性解法. 由于所求的向量的起点都为点 A,因此选择点 A 作为坐标原点,可简化计算过程.

8. D 依题意,作出函数 $f(x)$的草图,其中 $f(0)=0$. 不等式 $xf(x-1)\geqslant 0$ 可转化为 $x=0$ 或$\begin{cases}x>0,\\f(x-1)\geqslant 0\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\f(x-1)\leqslant 0,\end{cases}$则 $x=0$ 或$\begin{cases}x>0,\\0\leqslant x-1\leqslant 2\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\-2\leqslant x-1\leqslant 0,\end{cases}$解得 $1\leqslant x\leqslant 3$ 或$-1\leqslant x\leqslant 0$.



9. ACD　曲线 C 的方程可化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$. 因为 $m>n>0$，所以 $\frac{1}{n}>\frac{1}{m}>0$，则曲线 C 表示焦点在 y 轴上的椭圆，故 A 正确. 若 $m=n>0$，则曲线 C 可化为 $x^2+y^2=\frac{1}{n}$，表示半径为 $\sqrt{\frac{1}{n}}$ 的圆，故 B 错误. 对于选项 C，若 $mn<0$，则曲线 C 为双曲线，令 $mx^2+ny^2=0$，则可得双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$，故 C 正确. 当 $m=0$，$n>0$ 时，曲线 C 可转化为 $ny^2=1$，解得 $y=\pm\sqrt{\frac{1}{n}}$，表示两条直线，故 D 正确.

10. BC　依题意得 $\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，则周期 $T=\pi$，所以 $|\omega|=\frac{2\pi}{\pi}=2$，所以 $\omega=\pm2$，又函数的最低点为 $\left(\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}}{2},-1\right)$，即 $\left(\frac{5\pi}{12},-1\right)$. 当 $\omega=2$ 时，则 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=-1$，所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=2k\pi-\frac{4\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，此时 $y=\sin\left(2x+2k\pi-\frac{4\pi}{3}\right)$，令 $k=1$，则 $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 当 $\omega=-2$ 时，则 $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=-1$，所以 $-\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，此时 $y=\sin\left(-2x+2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$，令 $k=0$，则 $y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

易错警示　本题没有指明 $\omega>0$，故要分两种情况，分别求解. 求解 φ 时，往往通过代入最值点计算，此外本题还要熟悉诱导公式.

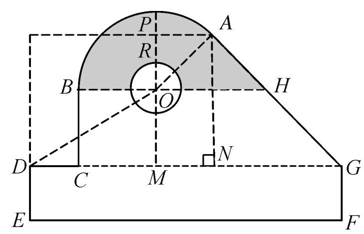
11. ABD　因为 $a^2+b^2\geqslant2ab$，所以 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2=1$，所以 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$，故 A 正确；$2^{a-b}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow2^{a-b}>2^{-1}$，即 $a>b-1$，显然成立，故 B 正确；$\log_2a+\log_2b\geqslant-2$，即 $ab\geqslant\frac{1}{4}$，又 $a+b=1\geqslant2\sqrt{ab}$，所以 $ab\leqslant\frac{1}{4}$，故 C 错误；因为 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}\leqslant2(a+b)=2$，所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$，故 D 正确.

12. AC　对于选项 A，$n=1$，$p_1=1$，$H(X)=-p_1\log_2p_1=0$，故 A 正确. 对于选项 B，若 $n=2$，则 $H(X)=-[p_1\log_2p_1+(1-p_1)\log_2(1-p_1)]$，设 $f(p)=-[p\log_2p+(1-p)\log_2(1-p)]$，则 $f'(p)=-\left[\log_2p+p\cdot\frac{1}{p\cdot\ln2}-\log_2(1-p)+(1-p)\cdot\frac{-1}{(1-p)\ln2}\right]=-\log_2\frac{p}{1-p}$. 当 $p<\frac{1}{2}$ 时，$f'(p)>0$；当 $p>\frac{1}{2}$ 时，$f'(p)<0$. 故 B 错误. 对于选项 C，$H(X)=-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\log_2\frac{1}{n}=-n\cdot\frac{1}{n}\cdot\log_2\frac{1}{n}=\log_2n$，随着 n 的增大，$H(X)$ 增大，故 C 正确. 对于选项 D，$H(X)=-\sum\limits_{i=1}^{2m}p_i\log_2p_i=-\sum\limits_{i=1}^{m}(p_i\log_2p_i+p_{2m+1-i}\log_2p_{2m+1-i})$，$H(Y)=-\sum\limits_{j=1}^{m}(p_j+p_{2m+1-j})\log_2(p_j+p_{2m+1-j})=-\sum\limits_{i=1}^{m}(p_i+p_{2m+1-i})\log_2(p_i+p_{2m+1-i})$，因为 $(p_i+p_{2m+1-i})\log_2(p_i+p_{2m+1-i})=p_i\log_2(p_i+p_{2m+1-i})+p_{2m+1-i}\log_2(p_i+p_{2m+1-i})>p_i\log_2p_i+p_{2m+1-i}\log_2p_{2m+1-i}$，所以 $H(X)>H(Y)$，D 错误.

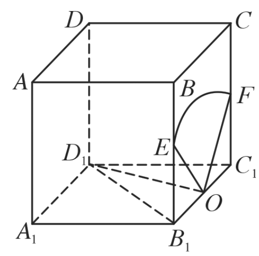
13. $\frac{16}{3}$　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$，与抛物线方程联立，消去 y 得 $3x^2-10x+3=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{10}{3}$，所以 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{10}{3}+2=\frac{16}{3}$.

14. $3n^2-2n$　写出数列 $\{2n-1\}$ 的项为 1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，…再写出数列 $\{3n-2\}$ 的项为 1，4，7，10，13，16，19，…则可以得到两数列的公共项为 1，7，13，19，…可以归纳得数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 6 的等差数列，所以 $a_n=6n-5$，所以前 n 项和为 $\frac{n(1+6n-5)}{2}=3n^2-2n$.

15. $\frac{5\pi}{2}+4$　如图，作 AN 垂直于 DG，垂足为点 N. 由题意知 $AN=7-2=5$，$NG=12-7=5$，则 $AN=NG$，所以 $\angle AGN=45°$，所以 $\angle AOH=\angle AHO=45°$，设 $OP=x$，则 $OM=5-x$，$DM=7-x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ODM$ 中，$\tan\angle ODC=\frac{5-x}{7-x}=\frac{3}{5}$，解得 $x=2$. $S_{阴影}=S_{扇形AOB}+S_{\triangle AOH}-S_{半圆O}=\frac{\frac{3}{4}\pi}{2\pi}\times\pi\times(2\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\pi\times1^2=\frac{5\pi}{2}+4$.



16. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$　**分析：**欲求交线的长度，首先要明确交线的形状. 我们知道球与平面相交所得的图形为圆，那么球与确定的侧面 BCC_1B_1 的交线就应该为圆或圆的一部分，即圆弧. 通过取 B_1C_1 的中点，找到截面圆的圆心，进而得到截面圆的半径，即可得到球面与侧面 BCC_1B_1 交线的长度.



如图所示的直四棱柱中，由题意知，$\triangle B_1C_1D_1$ 是边长为 2 的等边三角形，取 B_1C_1 的中点 O，连接 D_1O，则 $D_1O\perp B_1C_1$，又 $BB_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1$，$D_1O\subset$ 底面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $BB_1\perp D_1O$，又 $B_1C_1\cap BB_1=B_1$，B_1C_1，$BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $D_1O\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 O 为截面圆的圆心. 又 $D_1O=\sqrt{3}$，球的半径为 $\sqrt{5}$，截面圆的半径为 $\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$，所以球面与侧面 BCC_1B_1 的交线为弧 $\overset{\frown}{EF}$，又 $\angle B_1OE=\angle C_1OF=\frac{\pi}{4}$，所以 $\angle EOF=\frac{\pi}{2}$，所以 $\overset{\frown}{EF}=\frac{\pi}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

17. 解：选条件①. 由 $C=\frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$. 于是 $\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由此可得 $b=c$. 由①$ac=\sqrt{3}$，解得 $a=\sqrt{3}$，$b=c=1$. 因此，选条件①时问题中的三角形存在，此时 $c=1$.

选条件②. 由 $C=\frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$. 于是 $\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由此可得 $b=$

$c, B=C=\dfrac{\pi}{6}, A=\dfrac{2\pi}{3}$. 由②$c\sin A=3$,所以 $c=b=2\sqrt{3}$,$a=6$. 因此,选条件②时问题中的三角形存在,此时 $c=2\sqrt{3}$.

选条件③. 由 $C=\dfrac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$. 于是 $\dfrac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,由此可得 $b=c$. 由③$c=\sqrt{3}b$,与 $b=c$ 矛盾. 因此,问题中的三角形不存在.

18. 解:(1)设$\{a_n\}$的公比为 q. 由题设得 $a_1q+a_1q^3=20$,$a_1q^2=8$,解得 $q=\dfrac{1}{2}$(舍去),$q=2$. 由题设得 $a_1=2$. 所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$.

(2) 由题设及(1)知 $b_1=0$,且当 $2^n\leqslant m<2^{n+1}$ 时,$b_m=n$. 所以 $S_{100}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)+\cdots+(b_{32}+b_{33}+\cdots+b_{63})+(b_{64}+b_{65}+\cdots+b_{100})=0+1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times2^5+6\times(100-63)=480$.

19. 解:(1)根据抽查数据,该市 100 天的空气中 $PM_{2.5}$ 浓度不超过 75,且 SO_2 浓度不超过 150 的天数为 $32+18+6+8=64$,因此,该市一天空气中 $PM_{2.5}$ 浓度不超过 75,且 SO_2 浓度不超过 150 的概率的估计值为$\dfrac{64}{100}=0.64$.

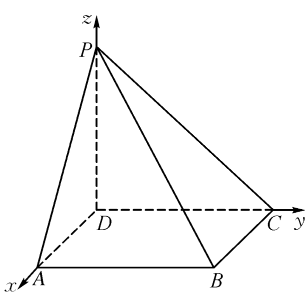
(2) 根据抽查数据,可得 2×2 列联表:

$PM_{2.5}$ \ SO_2	[0,150]	(150,475]
[0,75]	64	16
(75,115]	10	10

(3)根据(2)的列联表得 $\chi^2=\dfrac{100\times(64\times10-16\times10)^2}{80\times20\times74\times26}\approx7.484$.

由于 $7.484>6.635$,故有 99%的把握认为该市一天空气中 $PM_{2.5}$ 浓度与 SO_2 浓度有关.

20. 解:(1)因为 $PD\perp$底面 $ABCD$,所以 $PD\perp AD$. 又底面 $ABCD$ 为正方形,所以 $AD\perp DC$,又 $PD\cap DC=D$,因此 $AD\perp$平面 PDC. 因为 $AD/\!/BC$,$AD\not\subset$平面 PBC,所以 $AD/\!/$平面 PBC. 由已知得 $l/\!/AD$,因此 $l\perp$平面 PDC.



(2)以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$. 则 $D(0,0,0)$,$C(0,1,0)$,$B(1,1,0)$,$P(0,0,1)$,$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$. 由(1)可设 $Q(a,0,1)$,则 $\overrightarrow{DQ}=(a,0,1)$. 设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 QCD 的法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ax+z=0,\\ y=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(-1,0,a)$. 所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{-1-a}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+a^2}}$. 设 PB 与平面 QCD 所成角为 θ,则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{1+\dfrac{2a}{a^2+1}}$. 因为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{1+\dfrac{2a}{a^2+1}}\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,当且仅当 $a=1$ 时等号成立,所以 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

21. 解:(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=ae^{x-1}-\dfrac{1}{x}$. 当 $a=e$ 时,$f(x)=e^x-\ln x+1$,$f'(1)=e-1$,曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y-(e+1)=(e-1)(x-1)$,即 $y=(e-1)x+2$. 直线 $y=(e-1)x+2$ 在 x 轴、y 轴上的截距分别为$\dfrac{-2}{e-1}$,2. 因此所求三角形的面积为$\dfrac{2}{e-1}$.

(2) 当 $0<a<1$ 时,$f(1)=a+\ln a<1$. 当 $a=1$ 时,$f(x)=e^{x-1}-\ln x$,$f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$. 当 $x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$. 所以当 $x=1$ 时,$f(x)$取得最小值,最小值为 $f(1)=1$,从而 $f(x)\geqslant1$. 当 $a>1$ 时,$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a\geqslant e^{x-1}-\ln x\geqslant1$.

综上,a 的取值范围是$[1,+\infty)$.

22. 解:(1)由题设得$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$,$\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$,解得 $a^2=6$,$b^2=3$. 所以 C 的方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$. 若直线 MN 与 x 轴不垂直,设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$,代入$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$. 于是 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2}$ ①,由 $AM\perp AN$ 知$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$,故$(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$,可得$(k^2+1)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+(m-1)^2+4=0$. 将①代入上式整理得$(2k+3m+1)(2k+m-1)=0$. 因为 $A(2,1)$不在直线 MN 上,所以 $2k+m-1\neq0$,故 $2k+3m+1=0$,$k\neq1$. 于是 MN 的方程为 $y=k\left(x-\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{1}{3}(k\neq1)$. 所以直线 MN 过点 $P\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.

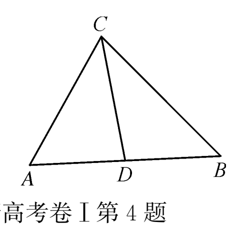
若直线 MN 与 x 轴垂直,可得 $N(x_1,-y_1)$. 由 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$ 得$(x_1-2)(x_1-2)+(y_1-1)(-y_1-1)=0$. 又$\dfrac{x_1^2}{6}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$,可得 $3x_1^2-8x_1+4=0$,解得 $x_1=2$(舍去)或$\dfrac{2}{3}$. 此时直线 MN 过点 $P\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$. 令 Q 为 AP 的中点,即 $Q\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$. 若 D 与 P 不重合,则由题设知 AP 是 $Rt\triangle ADP$ 的斜边,故$|DQ|=\dfrac{1}{2}|AP|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. 若 D 与 P 重合,则$|DQ|=\dfrac{1}{2}|AP|$. 综上,存在点 $Q\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$,使得 DQ 为定值.

2020 年普通高等学校招生全国统一考试·新高考卷Ⅱ

1. C $A\cap B=\{2,3,5\}$.

2. B $(1+2i)(2+i)=2+i+4i+2i^2=5i$.

3. C $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+2(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})=2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$.



4. B 解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 4 题

5. C 解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 5 题

6. C 第一步,将 3 名学生分成两个组,有 $C_3^1C_2^2=3$(种)分法;第二

步，将 2 组学生安排到 2 个村，有 $A_2^2=2$(种)安排方法，所以不同的安排方法共有 $3\times2=6$(种).

7. D　$f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$. 因为 $y=x^2-4x-5$ 在$(5,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)=\lg(x^2-4x-5)$在$(5,+\infty)$上单调递增，所以 $a\geqslant5$.

8. D　解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 8 题

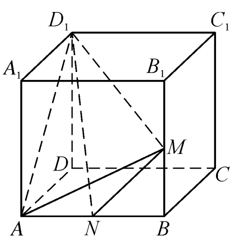
9. CD　第 1 天到第 2 天复工指数减少，第 7 天到第 8 天复工指数减少，第 10 天到第 11 天复工指数减少，第 8 天到第 9 天复产指数减少，故 A 错误；第 1 天的复产指数与复工指数的差大于第 11 天的复产指数与复工指数的差，所以这 11 天期间，复产指数增量小于复工指数的增量，故 B 错误；由图可知，第 3 天至第 11 天复工复产指数均超过 80%，故 C 正确；由图可知，第 9 天至第 11 天复产指数的增量大于复工指数的增量，故 D 正确.

10. ACD　解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 9 题

11. BC　解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 10 题

12. ABD　解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 11 题

13. $\frac{1}{3}$　$V_{三棱锥A\text{-}NMD_1}=V_{三棱锥D_1\text{-}AMN}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times2=\frac{1}{3}$.



14. $\frac{16}{3}$　解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 13 题

15. $3n^2-2n$　解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 14 题

16. $\frac{5\pi}{2}+4$　解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 15 题

17. 选①存在，$c=1$；选②存在，$c=2\sqrt{3}$；选③不存在　解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 17 题

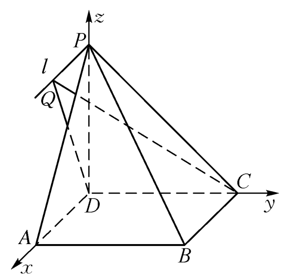
18. 解：(1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>1)$，则$\begin{cases}a_2+a_4=a_1q+a_1q^3=20,\\a_3=a_1q^2=8,\end{cases}$整理可得 $2q^2-5q+2=0$. 因为 $q>1$，所以 $q=2$，$a_1=2$. 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$.

(2)由于$(-1)^{n-1}a_na_{n+1}=(-1)^{n-1}\times2^n\times2^{n+1}=(-1)^{n-1}2^{2n+1}$，故 $a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}=2^3-2^5+2^7-2^9+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot2^{2n+1}=\frac{2^3[1-(-2^2)^n]}{1-(-2^2)}=\frac{8}{5}-(-1)^n\frac{2^{2n+3}}{5}$.

19. (1)0.64　(2)列联表见解析　(3)有 99%的把握　解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 19 题

20. 解：(1)因为 $PD\perp$底面 $ABCD$，所以 $PD\perp AD$. 又底面 $ABCD$ 为正方形，所以 $AD\perp DC$. 又 $PD\cap DC=D$，PD，$DC\subset$平面 PDC，所以 $AD\perp$平面 PDC. 因为 $AD/\!/BC$，$AD\not\subset$平面 PBC，所以 $AD/\!/$平面 PBC. 由已知得 $l/\!/AD$，因此 $l\perp$平面 PDC.

(2)如图建立空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$. 因为 $PD=AD=1$，则有 $D(0,0,0)$，$C(0,1,0)$，$A(1,0,0)$，$P(0,0,1)$，$B(1,1,0)$. 设 $Q(m,0,1)$，则 $\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{DQ}=(m,0,1)$，$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$. 因为 $QB=\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{(m-1)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$，得 $m=1$. 设平面 QCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{DQ}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y=0,\\x+z=0,\end{cases}$令 $x=1$，则 $z=-1$，所以平面 QCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$. 则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PB}|}=\frac{1+0+1}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\times\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 所以 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.



21. 解：(1) **分析：**根据题意，建立关于 a，b 的方程组，解得 a，b 的值，进而得到椭圆的方程.

根据题意，把点(2，3)代入椭圆方程得$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$　①. 设 $A(-a,0)$，又 $k_{AM}=\frac{3}{2+a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=4$，代入①式，解得 $b^2=12$，所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2) **分析：**由于$\triangle AMN$ 的底边 AM 的长为定值，所以欲求面积的最大值就是要求点 N 到直线 AM 距离的最大值，通过观察图形，转化为求两平行线之间的距离，问题得以解决.

由题意，可知 AM 的直线方程为 $x-2y+4=0$. 设直线 $x-2y+m=0$ 与椭圆相切于点 N，联立$\begin{cases}x-2y+m=0,\\\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\end{cases}$消去 x 得 $16y^2-12my+3m^2-48=0$，令 $\Delta=144m^2-64(3m^2-48)=0$，得 $m=\pm8$. 由题意可知当 $m=-8$ 时，$\triangle AMN$ 面积最大，直线 $x-2y+4=0$ 与直线 $x-2y-8=0$ 的距离 $d=\frac{|4-(-8)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，又$|AM|=\sqrt{(-4-2)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{5}$，所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}=18$.

解后反思　圆锥曲线中的最值、范围问题解决方法一般分为两种：一是代数法，从代数的角度考虑，建立函数、不等式等模型，利用二次函数法和基本不等式法、换元法、导数法，或利用判别式构造不等式关系、利用隐含或已知的不等关系建立不等式等方法求最值、范围. 二是几何法，从圆锥曲线的几何性质角度考虑，根据圆锥曲线几何意义求得最值.

22. (1)$\frac{2}{e-1}$　(2)$[1,+\infty)$　解析见 2020 新高考卷Ⅰ第 21 题