

C28 二次开发

第 14 题 · 变式探究 (2026 河北二模) 在母线与底面所成角为 $\frac{\pi}{3}$ 的圆锥内放入三个半径为 1 的小球, 这三个球两两相切, 且均与圆锥的底面和侧面都相切, 则圆锥的底面半径为 _____; 若再放入一个半径为 r 的小球, 使得它与上述三个小球均相切, 且与圆锥的侧面相切, 则 $r =$ _____.

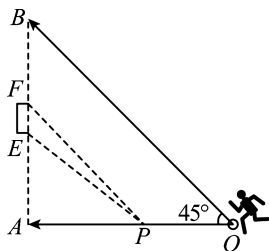
第 15 题 · 变式探究 (2026 湖南怀化二模) 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上一点, $BD = AD = 2CD$.

(1) 若 $BD = 2, AB = 1$, 求 AC 的长;

(2) 求 $\frac{\tan \angle BAC}{\tan \angle ABC}$ 的值.

C29 二次开发

第 14 题 · 变式探究 (2023 广东深圳二模) 足球是一项很受欢迎的体育运动. 如图, 某标准足球场的底线宽 $AB=72$ 码, 球门宽 $EF=8$ 码, 球门位于底线的正中位置. 在比赛过程中, 攻方球员带球运动时, 往往需要找到一点 P , 使得 $\angle EPF$ 最大, 这时候点 P 就是最佳射门位置. 当攻方球员甲位于边线上的点 O 处 ($OA=AB, OA \perp AB$) 时, 根据场上形势判断, 有 \vec{OA}, \vec{OB} 两条进攻线路可供选择. 若选择线路 \vec{OA} , 则甲带球 _____ 码时, 到达最佳射门位置; 若选择线路 \vec{OB} , 则甲带球 _____ 码时, 到达最佳射门位置.



第 18 题 · 变式探究 (2026 安徽马鞍山二模) 在某次乒乓球课上, 甲、乙、丙、丁四人进行游戏, 先在四人中每两人之间进行一场乒乓球比赛, 每场比赛胜者积 1 分, 负者积 0 分, 没有平局. 乒乓球比赛结束后, 再进行抽奖, 积分为 k 的人有 k 次抽奖机会, 每人的游戏总得分为其比赛积分与中奖次数的和, 总得分最高者 (允许并列) 获得奖励. 已知每场乒乓球比赛中每人获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$, 每次抽奖每人中奖的概率均为 p ($0 < p < 1$), 且各场比赛结果、每次抽奖结果互不影响.

- (1) 求甲在乒乓球比赛中积 1 分的概率;
- (2) 记甲在游戏中总得分为 2 的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最小值;
- (3) 若 $p = \frac{1}{2}$, 记事件 A 为“甲在乒乓球比赛中积 3 分”, 事件 B 为“甲在游戏中获得奖励”, 求 $P(B|A)$.

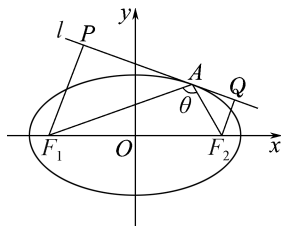
C32 二次开发

第 17 题 · 变式探究 1 (2026 河北衡水二模) 已知直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 12$ 交于 A, B 两点, 直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 切于点 P . 若以 A, B 为切点的圆的两条切线交于点 Q, O 为坐标原点, 则 $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} =$ ()

A. 4 B. 8 C. 12 D. 16

第 17 题 · 变式探究 2 (2026 浙江温州模拟预测) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 A 处的切线为 l , 两焦点 F_1, F_2 在 l 上的射影分别为点 P, Q . 我们常常把过切点 A 且与切线 l 垂直的直线叫作法线, 它平分 $\angle F_1 A F_2$, 因此从一个焦点射出的光线经过切点反射后会经过另一个焦点 (如图). 记 $|PF_1| = d_1, |QF_2| = d_2$, 当点 A 不在 x 轴上时, 记 $\triangle A F_1 F_2, \triangle P A F_1, \triangle Q A F_2$ 的面积分别为 S_0, S_1, S_2 . 若 $\angle F_1 A F_2 = \theta$.

- (1) 求证: $S_0 = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$.
- (2) 试探究 $d_1 d_2$ 是否为定值. 如果为定值, 求出此定值; 如果不为定值, 请说明理由.
- (3) 当点 A 不在 x 轴上时, 是否存在常数 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $S_1 S_2 = \lambda S_0^2$ 恒成立? 请给出证明或解释.
- (4) 若椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且当 $\theta = 60^\circ$ 时, 四边形 $P F_1 F_2 Q$ 的面积为 $8\sqrt{3}$, 求椭圆 E 的方程.



第 18 题 · 变式探究 在面积为 2 的矩形 $ABCD$ 中, E 为边 AD 的中点, 将 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DEC$ 分别沿边 BE, CE 翻折, 使得点 A, D 重合于点 P , 则三棱锥 $P - EBC$ 体积的最大值为 _____.

C33 二次开发

第 8 题 · 变式探究 1 (2026 陕西咸阳模拟预测) 已知函数 $f(x) = e^x + e^{-x} + \cos x - 3$, 若 $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f(mx+1) \leq f(x-2)$, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $[-5, -1]$ B. $[-5, 0]$ C. $[-2, 1]$ D. $[-2, 0]$

第 8 题 · 变式探究 2 (2026 河北保定二模) 已知函数 $f(x) = 2026^{-x} - 2026^x + 2$, 若关于 z 的不等式 $f\left(2^z + \frac{1}{2^z}\right) + f(m) < 4$ 在 $(0, 2)$ 上有解, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, -2]$ C. $\left(-\frac{17}{4}, +\infty\right)$ D. $\left[-\frac{17}{4}, +\infty\right)$

第 14 题 · 变式探究 (2026 山东聊城二模) 已知点 $A(2, 0), B(-2, 0)$, 动点 P 满足: 以 PA 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = 9$ 相切. 若 $\triangle PAB$ 的外接圆面积是其内切圆面积的 16 倍, 则 $\triangle PAB$ 的面积为_____.

C34 二次开发

第 11 题 · 变式探究 1 (多选题, 2026 湖北仙桃期中) 已知曲线 $C: 4x|x| - 5y|y| = 20$, 点 $F_1(0, 3)$, $F_2(0, -3)$, 则下列结论正确的是 ()

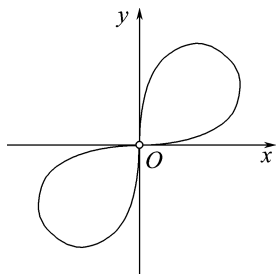
- A. 曲线 C 关于直线 $y = -x$ 对称
- B. 曲线 C 上存在点 M , 使得 $|MF_1| - |MF_2| = 4$
- C. 直线 $y = x$ 与曲线 C 只有一个交点
- D. 曲线 C 上第一象限内的点到直线 $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ 与 $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x$ 的距离之积为定值

第 11 题 · 变式探究 2 (多选题, 2026 湖南湘潭三模) 已知 P 是曲线 $\Gamma: 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8 = 0$ 上的动点, 点 $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$, $\triangle PAB$ 内切圆的圆心记为 I , 直线 PI 与直线 AB 交于点 Q , 则 ()

- A. Γ 关于直线 $y = x$ 对称
- B. 存在点 P , 使得 $|OP| > 2$ (O 为坐标原点)
- C. $|PA| + |PB|$ 为定值
- D. $|PI| = \sqrt{2}|QI|$

D35 二次开发

第 11 题 · 变式探究 1 (多选题, 2026 河南月考) 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$, 双曲线 $C_2: xy = 4$, 经过原点 O 的直线与 C_1 交于点 P , 与 C_2 交于点 Q . 设 R 是直线 PQ 上的动点, 且满足 $2|OP|^3 = |OQ|^2 \cdot |OR|$, 记 R 的轨迹为曲线 C , 如图所示, 则 ()



- A. 曲线 C 的方程为 $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2 (xy > 0)$ B. C 与 C_2 有公共点
 C. $|OR|$ 的最大值为 2 D. 点 R 到 x 轴的最大距离为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

第 11 题 · 变式探究 2 (多选题) 已知曲线 $\Gamma: 2(x+y) = (x-y)^3$, 则下列说法正确的有 ()

- A. 曲线 Γ 是中心对称图形
 B. 曲线 Γ 与直线 $y = kx (k \neq 1)$ 有三个不同的交点
 C. 该曲线可以作为一个函数的图象
 D. 当 $x \geq 0$ 时, $y_{\min} = -\frac{\sqrt{6}}{9}$

第 14 题 · 变式探究 甲、乙两人比赛投篮, 在每局比赛中两人分别投篮两次, 若每局投进的次数之和不小于 3, 则称该局比赛胜利. 已知甲、乙两人投篮相互独立, 且投进的概率均为 $\frac{2}{3}$. 记甲、乙两人投篮胜利的局数为 X , 若进行了 27 局比赛, 则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

D37 二次开发

第 11 题 · 变式探究 (多选题, 2026 河北唐山二模) 设 A, B 是一个随机试验中的两个事件, 记 $P(A+B) = \alpha, P(AB) = \beta, P(A)P(B) = \gamma$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $\gamma \neq 0$, 则 $P(A|B) + P(B|A) = \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\gamma}$
- B. 若 $\beta = \gamma$, 则 $P(A) + P(B) = \alpha$
- C. $P(\overline{AB}) = 1 - \alpha$
- D. $|\beta - \gamma| \leq \frac{1}{4}$

第 14 题 · 变式探究 1 (2026 陕西咸阳模拟预测) 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 的直线 l 与该双曲线的左、右支分别交于 A, B 两点, 记 $\triangle AF_1F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 的内切圆的半径分别为 r_1, r_2 . 若 $\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{7}$, 则 $\frac{|AF_1|}{|AB|}$ 的值为 _____.

第 14 题 · 变式探究 2 (2026 江西抚州二模) 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, P 是 C 上异于左、右顶点的动点, 记 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的面积为 S_1 , $\triangle PF_1F_2$ 外接圆的面积为 S_2 . 若 $\frac{S_2}{S_1}$ 的最小值为 4, 则 C 的离心率为 _____.

D38 二次开发

第 10 题 · 变式探究 (多选题, 2026 安徽马鞍山二模) 已知曲线 $E: \sqrt{x^2+y^2} - 3\sin^2 x + 3\cos^2 y = 3$, 则 ()

- A. 曲线 E 关于直线 $y=x$ 对称
- B. 曲线 E 与 x 轴有 4 个公共点
- C. 曲线 E 上存在一点 M , 使得 $|OM|=1$
- D. 曲线 E 上任意一点 (x, y) , 都有 $|x|+|y| < 6\sqrt{2}$

第 19 题 · 变式探究 (2026 重庆阶段检测) 设有穷数列 $\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ 满足

$\sum_{i=1}^n a_i = 0$ 且 $\sum_{i=1}^n |a_i| = t (t > 0)$, 则称其为“ n 阶- t 数列”.

(1) 若“8 阶-4 数列”: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ 是递增的等差数列, 求 a_1 .

(2) 设“ n 阶- t 数列”满足 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$.

① 记该“ n 阶- t 数列”的前 r 项和为 $S_r (1 \leq r \leq n)$, 求证: 数列 $\{S_n\}: S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ 不是“ n 阶- t 数列”;

② 求证: $n(a_1 - a_n) \geq 2t$.

答案与解析

C28 二次开发

第 14 题 · 变式探究

$$\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

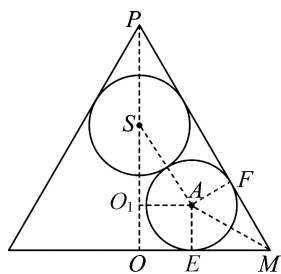


图 1

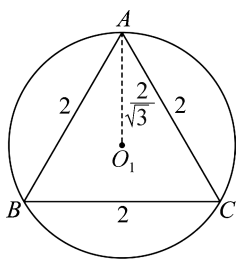


图 2

设圆锥的底面圆心为 O , 顶点为 P , 底面半径为 R , 高为 h , 三个半径为 1 的小球球心分别为 A, B, C . 因为母线与底面所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 所以 $h = R \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}R$, 故圆锥的轴截面是边长为 $2R$ 的等边三角形. 取过 PO 及球心 A 的截面, 如图 1. 设底边右端点为 M , 在该截面内, 圆 A 与 MO, MP 都相切, 切点分别为 E, F , 则 A 在 $\angle M$ 的平分线上, 且 A 到底边的距离为 1. 在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 中, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{MA}$, 解得 $MA = 2$, 则 $EM = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$. 如图 2, 设 O_1 为圆锥轴 PO 与平面 ABC 的交点, 则 $O_1A = R - \sqrt{3}$. 又因为三个小球两两相切, 所以 $AB = BC = CA = 2$, 故 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形. 由对称性可知, O_1 是 $\triangle ABC$ 的外心, 所以 $O_1A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 即 $R - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 解得 $R = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. 设再放入的小球半径为 r , 球心为 S . 由对称性可知, S 在圆锥轴上, 连接 SA , 如图 1, 由小球与侧面相切知 S 在顶角平分线上, 所以 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{r}{PS}$, 解得 $PS = 2r$. 又因为 $h = \sqrt{3}R = 5$, 所以 $SO = 5 - 2r$, 则 $SO_1 = 5 - 2r - 1 = 4 - 2r$. 球 S 与球 A 相切, 所以 $AS = 1 + r$. 在 $\text{Rt}\triangle SO_1A$ 中, $O_1A^2 + SO_1^2 = AS^2$, 即 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + (4 - 2r)^2 = (1 + r)^2$, 化简得 $9r^2 -$

$54r + 49 = 0$, 解得 $r = 3 \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$. 由 $4 - 2r > 0$ 得 $0 < r < 2$, 所

以 $r = 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

第 15 题 · 变式探究

解: (1) 由题意得, $AD = 2, BC = BD + DC = 2 + 1 = 3$, 由余弦定理得 $\cos \angle ABD = \frac{BD^2 + AB^2 - AD^2}{2BD \cdot AB} = \frac{4 + 1 - 4}{2 \times 2 \times 1} = \frac{1}{4}$, 故 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC} = \sqrt{1 + 9 - 2 \times 1 \times 3 \times \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

(2) 因为 $BD = AD$, 所以 $\angle ABC = \angle BAD$, 故 $\angle DAC = \angle BAC - \angle ABC, \angle ADC = 2\angle ABC$. 设 $CD = x$, 则 $BD = 2x$, 则 $AD = 2x, BC = 3x$. 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可得 $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$, 即 $\frac{3x}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$. 在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理可得 $\frac{CD}{\sin \angle DAC} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$, 即 $\frac{x}{\sin(\angle BAC - \angle ABC)} = \frac{AC}{\sin 2\angle ABC}$, 则 $\frac{3x \cdot \sin \angle ABC}{\sin \angle BAC} = \frac{x \cdot 2 \sin \angle ABC \cos \angle ABC}{\sin \angle BAC \cos \angle ABC - \cos \angle BAC \sin \angle ABC}$. 化简可得 $\sin \angle BAC \cdot \cos \angle ABC = 3 \cos \angle BAC \cdot \sin \angle ABC$, 则 $\tan \angle BAC = 3 \tan \angle ABC$, 即 $\frac{\tan \angle BAC}{\tan \angle ABC} = 3$.

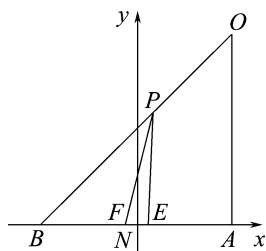
C29 二次开发

第 14 题 · 变式探究

$72 - 16\sqrt{5} \quad 72\sqrt{2} - 16\sqrt{5}$ 若选择线路 \vec{OA} , 设 $AP = t$, 其中 $0 < t \leq 72$, $AE = 32, AF = 32 + 8 = 40$, 则 $\tan \angle APE = \frac{AE}{AP} = \frac{32}{t}$, $\tan \angle APF = \frac{AF}{AP} = \frac{40}{t}$, 所以 $\tan \angle EPF = \tan(\angle APF - \angle APE) = \frac{\tan \angle APF - \tan \angle APE}{1 + \tan \angle APF \tan \angle APE} = \frac{\frac{40}{t} - \frac{32}{t}}{1 + \frac{1280}{t^2}} = \frac{\frac{8}{t}}{1 + \frac{1280}{t^2}}$

$$\frac{8}{t + \frac{1280}{t}} \leq \frac{8}{2\sqrt{t \cdot \frac{1280}{t}}} = \frac{\sqrt{5}}{20}, \text{ 当且仅当 } t = \frac{1280}{t}, \text{ 即 } t = 16\sqrt{5}$$

时, 等号成立, 此时 $OP = OA - AP = 72 - 16\sqrt{5}$, 所以若选择线路 \overrightarrow{OA} , 则甲带球 $(72 - 16\sqrt{5})$ 码时, 到达最佳射门位置. 若选择线路 \overrightarrow{OB} , 以线段 EF 的中点 N 为坐标原点, $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AO}$ 所在方向分别为 x 轴、 y 轴的正方向建立如图所示的平面直角坐标系,



则 $B(-36, 0), O(36, 72), F(-4, 0), E(4, 0), k_{OB} =$

$\frac{72}{36+36} = 1$, 直线 OB 的方程为 $y = x + 36$. 设点 $P(x, x +$

$36)$, 其中 $-36 < x \leq 36$. 当 $x \neq 4$ 且 $x \neq -4$ 时, $\tan \angle AFP =$

$k_{PF} = \frac{x+36}{x+4}, \tan \angle AEP = k_{PE} = \frac{x+36}{x-4}$, 所以 $\tan \angle EPF =$

$\tan(\angle AEP - \angle AFP) = \frac{\tan \angle AEP - \tan \angle AFP}{1 + \tan \angle AEP \tan \angle AFP} =$

$$\frac{\frac{x+36}{x-4} - \frac{x+36}{x+4}}{1 + \frac{x+36}{x-4} \cdot \frac{x+36}{x+4}} = \frac{\frac{8(x+36)}{x^2-16}}{1 + \frac{(x+36)^2}{x^2-16}} = \frac{8}{x+36 + \frac{x^2-16}{x+36}}. \text{ 令 } m =$$

$x+36 \in (0, 72]$, 则 $x = m - 36$, 所以 $x + 36 + \frac{x^2-16}{x+36} = m +$

$$\frac{(m-36)^2-16}{m} = 2m + \frac{1280}{m} - 72 \geq 2\sqrt{2m \cdot \frac{1280}{m}} - 72 =$$

$32\sqrt{10} - 72$, 当且仅当 $2m = \frac{1280}{m}$, 即 $m = 8\sqrt{10}, x =$

$8\sqrt{10} - 36$ 时, 等号成立, 所以 $\tan \angle EPF = \frac{8}{2m + \frac{1280}{m} - 72} \leq$

$\frac{8}{32\sqrt{10} - 72} = \frac{1}{4\sqrt{10} - 9}$, 当且仅当 $x = 8\sqrt{10} - 36$ 时, 等号成

立, 此时 $OP = \sqrt{2} \times [36 - (8\sqrt{10} - 36)] = 72\sqrt{2} - 16\sqrt{5}$. 当

$x = 4$ 时, $P(4, 40), \tan \angle EPF = \frac{EF}{PE} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} < \frac{1}{4\sqrt{10} - 9}$; 当

$x = -4$ 时, $P(-4, 32), \tan \angle EPF = \frac{EF}{PF} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} <$

$\frac{1}{4\sqrt{10} - 9}$. 所以若选择线路 \overrightarrow{OB} , 则甲带球 $(72\sqrt{2} - 16\sqrt{5})$ 码

时, 到达最佳射门位置.

第 18 题 · 变式探究

解: (1) 甲在乒乓球比赛中积 1 分, 则甲与乙、丙、丁三人的 3 场比赛中, 胜 1 场, 负 2 场, 故概率为 $C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$.

(2) 甲在游戏中总得分为 2, 对应事件为甲在乒乓球比赛中获得 1 积分, 抽奖 1 次中 1 次; 或甲在乒乓球比赛中获得 2 积分, 抽奖 2 次中 0 次, 故所求概率为 $f(p) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 p + C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 (1-p)^2 = \frac{3}{8} \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{32}$, 故当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $f(p)$ 取最小值 $\frac{9}{32}$.

(3) 由题意知, 共进行乒乓球比赛场数为 $C_4^2 = 6$. 若 A 发生, 则当且仅当甲战胜乙、丙、丁 3 人, 故 $P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

在事件 A 发生的条件下, 其余三人的积分有两种情形: 2, 1, 0 和 1, 1, 1. 记“甲在乒乓球比赛中积 3 分, 其余三人各得 1 分”

为事件 C_1 , 则 $P(C_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{32}, P(B|C_1) =$

1. 记“甲在乒乓球比赛中积 3 分, 其余三人得分为 2, 1, 0”为事

件 C_2 , 则 $P(C_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times C_2^1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{32}$. 此时甲

要获得奖励对应两种情况: 甲 3 次抽奖至少中一次, 甲 3 次抽奖一次都未中, 而得两分的人至多抽中一次. 故 $P(B|C_2) =$

$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{31}{32}$. 由全概率公式得

$P(AB) = P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2) = \frac{125}{1024}$, 所以

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{125}{128}.$$

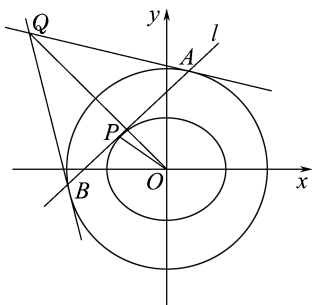
C32 二次开发

第 17 题 · 变式探究 1

C 设 $P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1)$, 有 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 即 $3x_0^2 + 4y_0^2 = 12$. 由直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 切于点 P , 得 $l: \frac{x_0}{4}x +$

$\frac{y_0}{3}y=1$, 即 $l: 3x_0x+4y_0y=12$. 由 AB 为点 Q 关于圆 O 的切点弦, 得 $l: x_1x+y_1y=12$ (详见二级结论册), 所以

$$\begin{cases} 3x_0=x_1, \\ 4y_0=y_1, \end{cases} \text{ 即 } Q(3x_0, 4y_0), \text{ 故 } \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 3x_0^2 + 4y_0^2 = 12.$$



第 17 题 · 变式探究 2

记 $|AF_1|=m, |AF_2|=n, |F_1F_2|=2c$, 则 $m+n=2a$, $a^2=b^2+c^2$.

(1) 证明: 在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 由余弦定理得 $m^2+n^2-2mn\cos\theta=4c^2$. 又 $m^2+n^2+2mn=4a^2$, 两式相减, 得

$$2mn(1+\cos\theta)=4b^2, \text{ 所以 } mn=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}. \text{ 故 } S_0=\frac{1}{2}mn\sin\theta=$$

$$\frac{b^2\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2b^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=b^2\tan\frac{\theta}{2}.$$

(2) 解: 由题意得 $\angle PF_1A=\angle QF_2A=\frac{\theta}{2}$, 故 $d_1=m\cos\frac{\theta}{2}, d_2=n\cos\frac{\theta}{2}$, 则 $d_1d_2=mn\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}mn(1+\cos\theta)$. 由 (1) 知, $mn=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}$, 则 $d_1d_2=\frac{2b^2}{1+\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{2}=b^2$. 当 A 为椭圆的左、右顶点时, $d_1d_2=(a+c)(a-c)=a^2-c^2=b^2$, 也满足上式. 故 $d_1d_2=b^2$, 为定值.

(3) 解: 由 $|AP|=d_1\tan\frac{\theta}{2}$, 得 $S_1=\frac{1}{2}d_1^2\tan\frac{\theta}{2}$, 同理, 可得 $S_2=\frac{1}{2}d_2^2\tan\frac{\theta}{2}$, 则 $S_1S_2=\frac{1}{4}(d_1d_2)^2\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}b^4\tan^2\frac{\theta}{2}$.

由 (1) 知, $S_0^2=b^4\tan^2\frac{\theta}{2}$, 则存在 $\lambda=\frac{1}{4}$, 使得等式成立.

(4) 解: 由 (2) 知 $d_1+d_2=(m+n)\cos\frac{\theta}{2}=2a\cos\frac{\theta}{2}$, $|PQ|=|AP|+|AQ|=(m+n)\sin\frac{\theta}{2}=2a\sin\frac{\theta}{2}$, 则 $S_{\text{四边形}PF_1F_2Q}=$

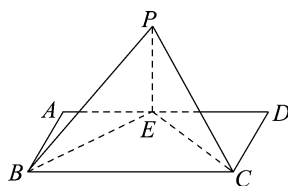
$\frac{1}{2}(d_1+d_2) \cdot |PQ|=a^2\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=8\sqrt{3}$, 则 $a^2=16$. 由

$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 知 $b=\frac{1}{2}a$, 则 $b^2=4$. 故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

第 18 题 · 变式探究

$\frac{\sqrt[4]{12}}{9}$ 由题意, 在矩形 $ABCD$ 中, E 为边 AD 的中点,

所以 $EA \perp AB, ED \perp DC$. 又将 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DEC$ 分别沿边 BE, CE 翻折, 使得点 A, D 重合于点 P , 所以 $EP \perp PB, EP \perp PC$. 又 $PB \cap PC = P, PB, PC \subset \text{平面 } PBC$, 所以 $EP \perp \text{平面 } PBC$, 如图所示.



设 $BC=a, AB=b$, 则 $PB=PC=b, EP=\frac{a}{2}$, 所以

$$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{4} \cdot a \cdot \sqrt{4b^2-a^2}, \text{ 故 } V_{P-EBC} =$$

$$V_{E-PBC}=\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PBC} \cdot EP=\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a \cdot \sqrt{4b^2-a^2} \cdot \frac{a}{2} =$$

$$\frac{1}{24} a^2 \cdot \sqrt{4b^2-a^2}=\frac{1}{24} \sqrt{a^4(4b^2-a^2)}=\frac{1}{24} \sqrt{a^2(4a^2b^2-a^4)}.$$

又矩形 $ABCD$ 的面积为 2, 所以 $AB \cdot BC=2$, 即 $ab=2$, 所以

$$V_{E-PBC}=\frac{1}{24} \sqrt{a^2(4a^2b^2-a^4)}=\frac{1}{24} \sqrt{a^2(16-a^4)}. \text{ 设 } t =$$

$a^2(0 < t < 4)$, 所以 $a^2(16-a^4)=t(16-t^2)$. 令 $f(t)=t(16-t^2)$, 则

$$f'(t)=16-3t^2. \text{ 令 } f'(t)=16-3t^2=0, \text{ 解得 } t=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

或 $t=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (舍), 当 $t \in (0, \frac{4\sqrt{3}}{3})$ 时, $f'(t) > 0, f(t)$ 在

$(0, \frac{4\sqrt{3}}{3})$ 上单调递增, 当 $t \in (\frac{4\sqrt{3}}{3}, 4)$ 时, $f'(t) < 0, f(t)$ 在

$(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 4)$ 上单调递减, 所以当 $t=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, 函数 $f(t)$ 取得最大

$$\text{值, 即 } f(t)_{\max}=f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3} \times \left[16-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]=\frac{128\sqrt{3}}{9},$$

所以 $a^2(16-a^4)$ 的最大值为 $\frac{128\sqrt{3}}{9}$, 所以三棱锥 $P-EBC$ 体

积的最大值为 $\frac{1}{24}\sqrt{\frac{128\sqrt{3}}{9}} = \frac{1}{24} \times \frac{8}{3} \times \sqrt{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{9}$.

C33 二次开发

第 8 题 · 变式探究 1

D 因为函数 $f(x) = e^x + e^{-x} + \cos x - 3$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x) = e^{-x} + e^x + \cos(-x) - 3 = e^x + e^{-x} + \cos x - 3 = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数. $f'(x) = e^x - e^{-x} - \sin x$, 令 $g(x) = e^x - e^{-x} - \sin x$, 则 $g'(x) = e^x + e^{-x} - \cos x$. 因为 $e^x + e^{-x} \geq 2$, $\cos x \leq 1$, 所以 $g'(x) \geq 2 - 1 = 1$, 所以 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. 又 $g(0) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $g(x) > 0$, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又函数 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 所以不等式 $f(mx+1) \leq f(x-2)$ 可化为 $|mx+1| \leq |x-2|$. 又 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, 所以 $|mx+1| \leq 2-x$, 即 $x-2 \leq mx+1 \leq 2-x$, $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. 由 $x-2 \leq mx+1$, 得 $m \geq 1 - \frac{3}{x}$, 即 $m \geq -2$; 由 $mx+1 \leq 2-x$, 得 $m \leq \frac{1}{x} - 1$, 即 $m \leq 0$. 综上, $-2 \leq m \leq 0$.

第 8 题 · 变式探究 2

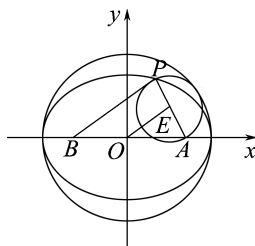
C 令函数 $g(x) = 2026^{-x} - 2026^x$, 则 $f(x) = g(x) + 2$. 因为 $g(-x) = 2026^x - 2026^{-x} = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 是奇函数. 因为 $y = 2026^x$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 所以 $y = -2026^x$ 是 \mathbf{R} 上的减函数. 又 $y = 2026^{-x} = (\frac{1}{2026})^x$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, 所以 $g(x) = 2026^{-x} - 2026^x$ 是 \mathbf{R} 上的减函数. 将 $f(x) = g(x) + 2$ 代入不等式 $f(2^z + \frac{1}{2^z}) + f(m) < 4$, 即 $[g(2^z + \frac{1}{2^z}) + 2] + [g(m) + 2] < 4$, 化简可得 $g(2^z + \frac{1}{2^z}) + g(m) < 0$. 因为 $g(x)$ 是奇函数, 所以 $g(2^z + \frac{1}{2^z}) = -g(-2^z - \frac{1}{2^z})$, 代入可得 $g(m) < g(-2^z - \frac{1}{2^z})$. 又 $g(x)$ 是减函数, 所以 $m > -(2^z + \frac{1}{2^z})$. 令 $t = 2^z$, $z \in (0, 2)$, 则 $t \in (1, 4)$, $2^z + \frac{1}{2^z} = t + \frac{1}{t}$. 因为 $y = t + \frac{1}{t}$ 是对勾函数, 且在 $(1, 4)$ 上单调递增, 所以 $t + \frac{1}{t} \in (2, \frac{17}{4})$, 则 $-(2^z + \frac{1}{2^z}) \in$

$(-\frac{17}{4}, -2)$. 因为 $m > -(2^z + \frac{1}{2^z})$ 在 $(0, 2)$ 上有解, 所以 $m > -\frac{17}{4}$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\frac{17}{4}, +\infty)$.

第 14 题 · 变式探究

$\frac{5\sqrt{3}}{3}$ 如图, 取线段 PA 的中点 E , O 为坐标原点. 易知

$|OE| = \frac{1}{2}|PB|$, 点 A 在圆 $x^2 + y^2 = 9$ 内, 所以以线段 PA 为直径的圆 E 与圆 $x^2 + y^2 = 9$ 内切, 所以 $|OE| = 3 - |AE|$, 所以 $|EO| + |EA| = 3$, 即 $\frac{1}{2}(|PB| + |PA|) = 3$, 可得 $|PA| + |PB| = 6 > |AB| = 4$.



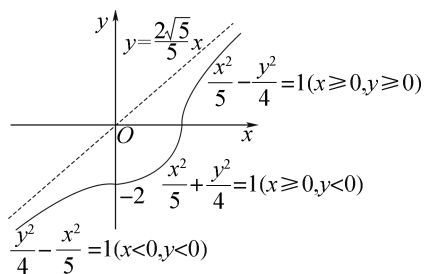
所以点 P 的轨迹是以 A, B 为焦点, 且长轴长为 $2a = 6$, 焦距为 $2c = 4$ 的椭圆 (除去长轴端点). 设该椭圆的短半轴长为 b , 因为 $a = 3, c = 2$, 所以 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$, 故点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 (x \neq \pm 3)$. 设 $\angle APB = \theta$, $|PA| = m$, $|PB| = n$, 则 $m + n = 2a = 6$, 由余弦定理可得 $|AB|^2 = 16 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta = (m + n)^2 - 2mn(1 + \cos \theta) = 6^2 - 2mn(1 + \cos \theta) = 36 - 2mn(1 + \cos \theta)$, 所以 $mn = \frac{10}{1 + \cos \theta}$, 所以 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}mn \sin \theta = \frac{1}{2} \times \frac{10 \sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{5 \sin \theta}{1 + \cos \theta}$. 设 $\triangle APB$ 的内切圆、外接圆半径分别为 r_1, r_2 , 由题意可知 $\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{1}{16}$, 则 $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{4}$. 因为 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}r_1(|PA| + |PB| + |AB|) = \frac{1}{2}r_1(2a + 2c) = \frac{1}{2}r_1 \times (6 + 4) = 5r_1 = \frac{5 \sin \theta}{1 + \cos \theta}$, 所以 $r_1 = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$. 由正弦定理可得 $2r_2 = \frac{|AB|}{\sin \theta} = \frac{4}{\sin \theta}$, 故 $r_2 = \frac{2}{\sin \theta}$. 因为 $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{4}$, 即 $r_2 = 4r_1$, 所以 $\frac{2}{\sin \theta} = \frac{4 \sin \theta}{1 + \cos \theta}$, 整理可得 $1 + \cos \theta = 2 \sin^2 \theta = 2(1 - \cos^2 \theta)$, 解得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 或 -1 (舍去),

所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 此时 $S_{\triangle APB} = \frac{5 \sin \frac{\pi}{3}}{1 + \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

C34 二次开发

第 11 题 · 变式探究 1

BCD 由题, 当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, 曲线 $C: \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$; 当 $x \geq 0, y < 0$ 时, 曲线 $C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$; 当 $x < 0, y \geq 0$ 时, 曲线 C 不存在; 当 $x < 0, y < 0$ 时, 曲线 $C: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$. 作出曲线 C 的图象, 如图所示.



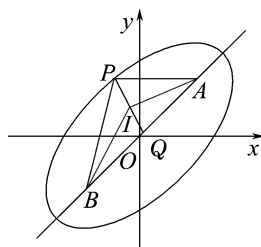
对于 A, 将 $4x|x| - 5y|y| = 20$ 中的 x 替换为 $-y, y$ 替换为 $-x$, 得 $-4y|y| + 5x|x| = 20$, 与 $4x|x| - 5y|y| = 20$ 不相同, 故曲线 C 不关于直线 $y = -x$ 对称, 故 A 错误(另解: 由图易知, 曲线 C 不关于直线 $y = -x$ 对称); 对于 B, 易知 $F_1(0, 3), F_2(0, -3)$ 为双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ 的上、下焦点, 所以当点 M 在第三象限时, 根据双曲线的定义可知 $|MF_1| - |MF_2| = 4$, 故 B 正确; 对于 C, 由图象易知直线 $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ 为双曲线 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 与双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ 的一条共同渐近线, 而直线 $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ 的斜率小于直线 $y = x$ 的斜率, 故直线 $y = x$ 与曲线 C 在第一象限内没有交点, 在第三象限内只有一个交点, 故 C 正确; 对于 D, 设曲线 C 上第一象限内的点为 $P(x_0, y_0) (x_0 > 0, y_0 > 0)$, 则 $\frac{x_0^2}{5} - \frac{y_0^2}{4} = 1$, 即 $\frac{4x_0^2}{5} - y_0^2 = 4$,

所以点 P 到直线 $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ 的距离 $d_1 = \frac{\left| y_0 - \frac{2\sqrt{5}}{5}x_0 \right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2}} =$

$\frac{\sqrt{5}}{3} \left| y_0 - \frac{2\sqrt{5}}{5}x_0 \right|$, 点 P 到直线 $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x$ 的距离 $d_2 = \frac{\left| y_0 + \frac{2\sqrt{5}}{5}x_0 \right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \left| y_0 + \frac{2\sqrt{5}}{5}x_0 \right|$, 所以 $d_1 d_2 = \frac{5}{9} \left| y_0^2 - \frac{4}{5}x_0^2 \right| = \frac{20}{9}$, 故 D 正确.

第 11 题 · 变式探究 2

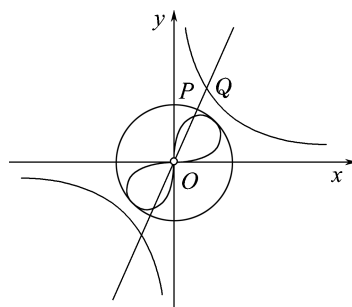
ACD 对于 A, 由方程中 x, y 互换后方程不变, 可得曲线 Γ 关于直线 $y = x$ 对称, 故 A 正确. 对于 B, 设 $P(x, y)$, 由 $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8 = 0$, 得 $3x^2 + 3y^2 - 8 = 2xy \leq x^2 + y^2$, 当且仅当 $x = y = \pm\sqrt{2}$ 时, 等号成立, 所以 $x^2 + y^2 \leq 4$, 从而 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$, 故 B 错误. 对于 C, $(|PA| + |PB|)^2 = [\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}]^2 = 2(x^2 + y^2) + 4 + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + 2)^2 - 4(x+y)^2} = 2(x^2 + y^2) + 4 + 2\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 12(x^2 + y^2) + 36} = 2(x^2 + y^2) + 4 + 2(6 - x^2 - y^2) = 16$, 故 $|PA| + |PB| = 4$, 是定值, 故 C 正确. 对于 D, $|AB| = 2\sqrt{2}$, 如图, 由选项 C 可知, Γ 是以 A, B 为焦点, 长轴长为 4, 焦距为 $2\sqrt{2}$ 的椭圆. I 是 $\triangle PAB$ 的内心, 在 $\triangle PAQ$ 中, 由角平分线定理得 $\frac{|PA|}{|AQ|} = \frac{|PI|}{|IQ|}$, 同理在 $\triangle PBQ$ 中有 $\frac{|PB|}{|BQ|} = \frac{|PI|}{|IQ|}$, 所以 $\frac{|PA|}{|AQ|} = \frac{|PI|}{|IQ|} = \frac{|PB|}{|BQ|}$. 由等比性质, 可得 $\frac{|PI|}{|IQ|} = \frac{|PA| + |PB|}{|AQ| + |BQ|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 即 $|PI| = \sqrt{2}|IQ|$, 故 D 正确.



D35 二次开发

第 11 题 · 变式探究 1

AC



如图, 设 $R(x, y)$ (显然 $xy > 0$), $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

另设 $\vec{OP} = \lambda \vec{OR}$, 则 $(x_1, y_1) = \lambda(x, y)$, 即 $\begin{cases} x_1 = \lambda x, \\ y_1 = \lambda y, \end{cases}$ 代入 $x_1^2 +$

$y_1^2 = 4$, 解得 $\lambda^2 = \frac{4}{x^2 + y^2}$. 设 $\vec{OQ} = \mu \vec{OR}$, 则 $(x_2, y_2) = \mu(x,$

$y)$, 即 $\begin{cases} x_2 = \mu x, \\ y_2 = \mu y, \end{cases}$ 代入 $x_2 y_2 = 4$, 解得 $\mu^2 = \frac{4}{xy}$. 由 O, P, Q, R 四

点共线且 $2|OP|^3 = |OQ|^2 \cdot |OR|$, 得 $2|\lambda \vec{OR}|^3 = |\mu \vec{OR}|^2 \cdot$

$|\vec{OR}|$, 即 $4\lambda^6 = \mu^4$, 所以 $4 \times \left(\frac{4}{x^2 + y^2}\right)^3 = \frac{16}{x^2 y^2}$, 化简得 $(x^2 +$

$y^2)^3 = 16x^2 y^2 (xy > 0)$, 此为曲线 C 的方程, 故 A 正确. 将

$xy = 4$ 代入 $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2 y^2$, 得 $x^2 + y^2 = 4\sqrt[3]{4}$, 所以 $(x +$

$y)^2 = 8 + 4\sqrt[3]{4}$, 即 $x + y = \pm\sqrt{8 + 4\sqrt[3]{4}}$, 此时以 x, y 为两根的

一元二次方程为 $z^2 \pm \sqrt{8 + 4\sqrt[3]{4}}z + 4 = 0$, 其判别式为 $\Delta = 8 +$

$4\sqrt[3]{4} - 16 < 0$, 所以该方程无解, 从而 C 与 C_2 无公共点, 故 B

错误. $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2 y^2 \leq 16\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$, 即 $x^2 + y^2 \leq 4$, 从

而 $|OR| \leq 2$, 当且仅当 $x = y = \pm\sqrt{2}$ 时取等号, 则 $|OR|_{\max} = 2$,

故 C 正确. 由对称性, 不妨取点 R 在第一象限, 设 $x^2 + y^2 =$

$M^2 (M > 0)$, $x = M \cos \theta, y = M \sin \theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, 代入 $(x^2 +$

$y^2)^3 = 16x^2 y^2$, 得 $M = 4 \cos \theta \sin \theta$, 则 $y = 4 \cos \theta \sin \theta \times \sin \theta =$

$4 \cos \theta \sin^2 \theta$. 令 $\cos \theta = t (0 < t < 1)$, 则 $y = F(t) = 4t(1 - t^2)$,

所以 $F'(t) = 4(1 - 3t^2) = -12\left(t + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 当 $0 < t <$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $F'(t) > 0$, $F(t)$ 单调递增; 当 $\frac{\sqrt{3}}{3} < t < 1$ 时, $F'(t) < 0$,

$F(t)$ 单调递减. 所以 $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 是 $F(t)$ 的极大值点也是最大值

点, 所以最大距离为 $F(t)_{\max} = F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}$, 故 D 错误.

第 11 题 · 变式探究

ACD 对于 A, 若点 (x, y) 在曲线 Γ 上, 满足 $2(x + y) =$

$(x - y)^3$. 将点 (x, y) 关于原点对称的点 $(-x, -y)$ 代入方

程, 左边 $= 2(-x - y) = -2(x + y)$, 右边 $= (-x + y)^3 =$

$0, x = 0$ 显然是一个解. 令 $2(1 + k) = (1 - k)^3 x^2$, 解得 $x^2 =$

$\frac{2(1 + k)}{(1 - k)^3}$. 当 $\frac{2(1 + k)}{(1 - k)^3} \leq 0$, 即 $k > 1$ 或 $k \leq -1$ 时, 仅有 1 个交

点, 故 B 错误. 对于 C, 令 $u = x - y$, 则 $y = x - u$, 代入原方程

可得 $\begin{cases} x = \frac{u^3 + 2u}{4}, \\ y = \frac{u^3 - 2u}{4}. \end{cases}$ 对 $x(u) = \frac{u^3 + 2u}{4}$ 求导得 $x'(u) =$

$\frac{3u^2 + 2}{4} > 0$, 故 $x(u)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, x 与 u 一一对应, 因此

每个 x 对应唯一 y , 满足函数定义, 即该曲线可以作为一个函

数的图象, 故 C 正确. 对于 D, 由选项 C 可知 $x \geq 0$ 即

$\frac{u^3 + 2u}{4} \geq 0$, 由 $u^2 + 2 > 0$, 得 $u \geq 0$. 对 $y(u) = \frac{u^3 - 2u}{4}$ 求导得

$y'(u) = \frac{3u^2 - 2}{4}$, 令 $y' = 0$, 得 $u = \frac{\sqrt{6}}{3} (u \geq 0)$, 易知 y 在 $u = \frac{\sqrt{6}}{3}$

处取得最小值, 即 $y_{\min} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 - 2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}}{4} = -\frac{\sqrt{6}}{9}$, 故 D 正确.

第 14 题 · 变式探究

16 每局游戏胜利包括三种情况: 甲投中 2 次, 乙投中 2

次, 概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$; 甲投中 2 次, 乙投中 1 次,

概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times C_2^1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{81}$; 甲投中 1 次, 乙投中 2 次,

概率为 $C_2^1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$. 所以每局游戏甲、乙两人

投篮胜利的概率为 $\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{16}{81} = \frac{16}{27}$. 由题意得 $X \sim$

$B\left(27, \frac{16}{27}\right)$, 所以 $E(X) = 27 \times \frac{16}{27} = 16$.

D37 二次开发

第 11 题 · 变式探究

ACD 对于 A, 若 $\gamma \neq 0$, 由概率的基本公式有 $P(A +$

$B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 则 $\alpha = P(A) + P(B) - \beta$,

所以 $P(A) + P(B) = \alpha + \beta$. 又 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B|$

$A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 且 $P(A)P(B) = \gamma$, 所以 $P(A|B) + P(B|A) =$

$\frac{P(AB)}{P(B)} + \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)[P(A) + P(B)]}{P(A)P(B)} = \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\gamma}$, 故

A, B 相互独立. 由于 $P(A)+P(B)=\alpha+\beta$, 要使 $P(A)+P(B)=\alpha$, 必须有 $\beta=0$, 而事件 A, B 相互独立并不意味着 $\beta=0$, 故 B 错误. 对于 C, 由德摩根定律知 $\overline{AB}=\overline{A} \cap \overline{B}=\overline{A \cup B}=\overline{A+B}$, 因此 $P(\overline{AB})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-\alpha$, 故 C 正确. 对于 D, 令 $P(A)=x, P(B)=y$, 其中 $x, y \in [0, 1]$, 令 $P(AB)=z$, 由概率的基本性质得 $\max\{0, x+y-1\} \leq z \leq \min\{x, y\}$. 要证 $|\beta-\gamma| \leq \frac{1}{4}$, 也就是证 $|P(AB)-P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$, 即证 $|z-xy| \leq \frac{1}{4}$, 即 $-\frac{1}{4} \leq z-xy \leq \frac{1}{4}$. ①先证 $z-xy \leq \frac{1}{4}$. 不妨设 $x \leq y$, 则 $z \leq \min\{x, y\}=x$, 则 $z-xy \leq x-xy=x(1-y) \leq x(1-x)$, 而函数 $f(x)=x(1-x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$, 则 $x(1-x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 时取得最大值 $\frac{1}{4}$, 因此 $z-xy \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, 当 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时取等号. ②再证 $-\frac{1}{4} \leq z-xy$, 即证 $xy-z \leq \frac{1}{4}$, 由于 $z \geq \max\{0, x+y-1\}$, 所以 $-z \leq -\max\{0, x+y-1\} = \min\{0, 1-x-y\}$, 因此 $xy-z \leq xy + \min\{0, 1-x-y\} = \min\{xy, xy-x-y+1\}$. 当 $x+y \leq 1$ 时, $\min\{xy, xy-x-y+1\} = xy-x-y+1$, 因此 $xy-z \leq xy-x-y+1 = (1-x)(1-y) < (1-x)x \leq \frac{1}{4}$. 综上所述, $-\frac{1}{4} \leq z-xy \leq \frac{1}{4}$, 故 D 正确.

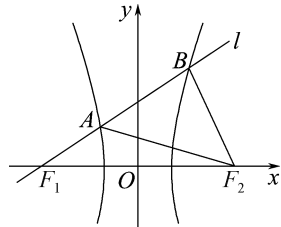
第 14 题 · 变式探究 1

$\frac{1}{3}$ 由双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$, 得 $a=1, b=2\sqrt{2}, c=3$, 则 $F_1(-3, 0), F_2(3, 0), |F_1F_2|=2c=6$. 如图, 设 $|AF_1|=m, |AB|=p$, 则 $|AF_2|=2a+|AF_1|=2+m, |BF_2|=|BF_1|-2a=m+p-2$, 所以 $S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2}r_1(|AF_1|+|AF_2|+|F_1F_2|) = \frac{1}{2}r_1(8+2m) = (4+m)r_1, S_{\triangle ABF_2} = \frac{1}{2}r_2(|AB|+|BF_2|+|AF_2|) = \frac{1}{2}r_2(2m+2p) = (m+p)r_2$, 则 $\frac{S_{\triangle AF_1F_2}}{S_{\triangle ABF_2}} = \frac{m}{p} = \frac{(4+m)r_1}{(m+p)r_2}$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 中, $\cos \angle F_1AF_2 = -\cos \angle F_2AB$, 由余弦定理可得 $\frac{m^2+(2+m)^2-6^2}{2m(2+m)} =$

$$-\frac{(2+m)^2+p^2-(m+p-2)^2}{2p(2+m)}, \text{整理得 } p = \frac{m^2}{4-m}, \text{所以 } \frac{r_1}{r_2} =$$

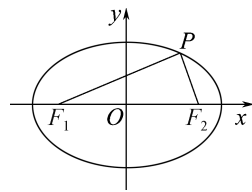
$$\frac{m^2+mp}{4p+mp} = \frac{m^2+\frac{m^3}{4-m}}{4m^2+\frac{m^3}{4-m}} = \frac{4}{4+m} = \frac{4}{7}, \text{解得 } m=3, \text{则 } p=9,$$

$$\text{所以 } \frac{|AF_1|}{|AB|} = \frac{m}{p} = \frac{1}{3}.$$



第 14 题 · 变式探究 2

$\frac{1}{2}$ 如图, 设 $\angle F_1PF_2 = \theta, |PF_1|=m, |PF_2|=n$.



由椭圆的定义可知 $m+n=2a$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理得 $\cos \theta = \frac{m^2+n^2-4c^2}{2mn} = \frac{(m+n)^2-4c^2-2mn}{2mn} = \frac{2b^2}{mn} - 1$, 则 $mn = \frac{2b^2}{\cos \theta + 1}$, 所以 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}mn \cdot \sin \theta = \frac{b^2 \sin \theta}{\cos \theta + 1} = \frac{b^2 \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$. 又 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2| = 2a + 2c$, 设 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的半径为 r , 则 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}(2a+2c) \cdot r = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$, 所以 $r = \frac{2b^2 \tan \frac{\theta}{2}}{2a+2c} = \frac{b^2 \tan \frac{\theta}{2}}{a+c}$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由正弦定理可知 $\frac{|F_1F_2|}{\sin \theta} = 2R$ (R 为 $\triangle PF_1F_2$ 外接圆的半径), 故 $R = \frac{c}{\sin \theta}$, 则 $\frac{R}{r} = \frac{c(a+c)}{b^2 \cdot \sin \theta \cdot \tan \frac{\theta}{2}} = \frac{c(a+c)}{b^2 \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}} = \frac{c(a+c)}{2b^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$. 由 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos \theta}{2} = 1 - \frac{b^2}{mn}$ 及 $mn \leq \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = a^2$ (当且仅

当 $m=n=a$ 时取等号), 可得 $\sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$, 则 $0 < \sin \frac{\theta}{2} \leq \frac{c}{a}$, 当 P 为短轴端点时, $\sin \frac{\theta}{2}$ 取得最大值 $\frac{c}{a}$, 此时 $\frac{R}{r} = \frac{c(a+c)}{2b^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{c(a+c)}{2b^2 \cdot \frac{c^2}{a^2}} = \frac{a^2(a+c)}{2b^2 c}$. 又 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$ 的最小值为 4, 所以 $\frac{R}{r}$ 的最小值为 2, 即 $\frac{a^2(a+c)}{2b^2 c} = 2$, 即 $a^2(a+c) = 4(a^2 - c^2)c$, 化简可得 $4c^3 - 3a^2c + a^3 = 0$, 等式左右两边同时除以 a^3 , 可得 $4e^3 - 3e + 1 = 0$, 即 $(e+1)(2e-1)^2 = 0$. 由椭圆的离心率 $e \in (0, 1)$, 得 $e = \frac{1}{2}$.

D38 二次开发

第 10 题 · 变式探究

AD 对于 A, 由 $\sqrt{x^2+y^2} - 3\sin^2 x + 3\cos^2 y = 3$, 得 $\sqrt{x^2+y^2} - 3\sin^2 x - 3\sin^2 y = 0$, 易知曲线 E 过原点, 若点 (x, y) 在曲线上, 则点 $(-x, -y), (x, -y), (-x, y), (y, x)$ 也在曲线上, 故曲线 E 关于原点、 x 轴、 y 轴、直线 $y=x$ 均对称, 故 A 正确. 对于 B, 由曲线关于 y 轴对称及曲线 E 过原点, 知曲线 E 与 x 轴必有奇数个公共点, 故 B 错误. 对于 C, 假设存在一点 $M(x_0, y_0)$, 使得 $|OM| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 1$, 则 $\sin^2 x_0 + \sin^2 y_0 = \frac{1}{3}$. 过点 $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1)$ 的直线方程为 $y = \frac{2}{\pi}x$, 结合 $y = \sin x$ 的图象知 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, x \in [0, 1]$, 由对称性不妨设 $x_0, y_0 \in [0, 1]$, 则 $\sin^2 x_0 + \sin^2 y_0 \geq \left(\frac{2}{\pi}x_0\right)^2 + \left(\frac{2}{\pi}y_0\right)^2 = \frac{4}{\pi^2} > \frac{1}{3}$, 矛盾, 故 C 错误; 对于 D, $\sqrt{x^2+y^2} = 3\sin^2 x + 3\sin^2 y \leq 6$, 当且仅当 $|\sin x| = |\sin y| = 1$ 时, 等号成立, 此时 $\sqrt{x^2+y^2} = 6$ 无法成立, 故等号取不到, 由 $\frac{|x|+|y|}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ 得 $|x|+|y| < 6\sqrt{2}$, 故 D 正确.

第 19 题 · 变式探究

(1) 解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d > 0)$, 由 $\sum_{i=1}^8 a_i = 0$, 得 $\frac{8(a_1+a_8)}{2} = 0$, 所以 $a_1 + a_8 = a_4 + a_5 = 0$. 因为 $d > 0$, 所以 $a_4 < 0, a_5 > 0$, 即当 $n \leq 4$ 时, $a_n < 0$, 当 $n > 4$ 时, $a_n > 0$, 所以 $\sum_{i=1}^8 |a_i| = -(a_1+a_2+a_3+a_4) + (a_5+a_6+a_7+a_8) = 4$, 即 $(a_5-a_1) + (a_6-a_2) + (a_7-a_3) + (a_8-a_4) = 4 \times 4d = 4$, 解得 $d = \frac{1}{4}$. 因为 $a_1 + a_8 = 0$, 即 $a_1 + a_1 + 7d = 0$, 解得 $a_1 = -\frac{7d}{2} = -\frac{7}{8}$.

(2) 证明: ①由题设条件可知 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 不可能全为 0, 也不可能全同号, 所以存在 $m (1 \leq m < n)$, 使得 $a_m \geq 0 > a_{m+1}$. 因为数列满足 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$, 所以当 $1 \leq i \leq m$ 时, $a_i \geq 0, S_i > 0$; 当 $m+1 \leq i \leq n$ 时, $a_i < 0, S_i \leq S_n = 0$. 所以 $|S_1| + |S_2| + |S_3| + \dots + |S_n| = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n > 0$, 即 $\sum_{i=1}^n S_i > 0$, 不满足条件, 所以数列 $\{S_n\}$ 不是“ n 阶- t 数列”.

②同①中取 m , 令 $\alpha = a_1 + a_2 + \dots + a_m, \beta = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$, 则由题设条件可知 $\alpha + \beta = 0, \alpha - \beta = t$, 所以 $\alpha = \frac{t}{2}, \beta = -\frac{t}{2}$. 因为 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n, \alpha = a_1 + a_2 + \dots + a_m \leq ma_1$, 即 $\alpha \leq ma_1, a_1 \geq \frac{\alpha}{m}, \beta = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n \geq (n-m)a_n, a_n \leq \frac{\beta}{n-m}$. 又 $\alpha = \frac{t}{2}, \beta = -\frac{t}{2}$, 所以 $a_1 - a_n \geq \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n-m} = \frac{t}{2m} + \frac{t}{2(n-m)} = \frac{nt}{2m(n-m)} \geq \frac{nt}{2\left(\frac{m+n-m}{2}\right)^2} = \frac{2t}{n}$, 即 $n(a_1 - a_n) \geq 2t$, 当且仅当 n 为偶数, $m = \frac{n}{2}, a_1 = a_2 = \dots = a_m = \frac{t}{2m}, a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = a_n = -\frac{t}{2m}$ 时取等号. 命题得证.