

变式练透和类题拓展

考点过关 1

第 13 题 类题拓展

答案 $(3, +\infty)$

集合 M 为空集 \Leftrightarrow 方程 $(m-1)x^2 - 4x + 2 = 0$ 无实根. 当 $m-1 \neq 0$ 时, 判别式 $\Delta = 16 - 8(m-1) < 0$, 则 $m > 3$. 当 $m-1 = 0$ 时, 方程退化为一元一次方程 $-4x + 2 = 0$, 有解, 不符合. 综上, $m > 3$.

考点过关 2

第 6 题 变式练透

答案 $a \leq 4$ (答案不唯一)

命题 p 成立, 即 $\forall x \in [1, 3], x^2 - ax + 3 > 0$, 分离参数得 $a < x + \frac{3}{x}$ 对 $x \in [1, 3]$ 恒成立. 由基本不等式得 $x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{3}$ (当且仅当 $x = \sqrt{3}$ 时取等), 故 p 成立的充要条件是 $a < 2\sqrt{3}$. 必要不充分条件需为包含 $a < 2\sqrt{3}$ 的范围 (如 $a \leq 4$, 答案不唯一).

考点过关 3

第 6 题 类题拓展

答案 $(-5, -4]$

设方程两根 $x_1, x_2 > 2$, 则需满足:

$$\textcircled{1} \Delta = (m-2)^2 - 4(5-m) \geq 0, \text{ 得 } m \leq -4 \text{ 或 } m \geq 4.$$

$$\text{令 } f(x) = x^2 + (m-2)x + 5 - m, \text{ 则 } f(2) = 4 + 2(m-2) + 5 - m > 0, \text{ 得 } m > -5.$$

$$\textcircled{2} \text{ 对称轴 } \frac{2-m}{2} > 2, \text{ 即 } m < -2.$$

取交集得 $-5 < m \leq -4$.

考点过关 4

第 14 题 类题拓展

答案 12

设 $AD = x, 0 < x < 8$, 则 $BD = 8 - x$. 因为 $\triangle CFE \sim \triangle CAB$, 所以 $\frac{6-AF}{6} = \frac{x}{8}$, 解得 $AF = 6 - \frac{3}{4}x$.

所以花园 $ADEF$ 的面积为 $S = x \left(6 - \frac{3}{4}x \right) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4}x \left(6 - \frac{3}{4}x \right) \leq \frac{4}{3} \times \left(\frac{\frac{3}{4}x + 6 - \frac{3}{4}x}{2} \right)^2 = 12$, 当且仅当

$\frac{3}{4}x = 6 - \frac{3}{4}x$, 即 $x = 4$ 时, 等号成立. 所以花园 $ADEF$ 的面积的最大值为 12m^2 .

考点过关 5

第 12 题 类题拓展

答案 BC

从图象上看, $0 \leq ax^2 + bx + c \leq 1$ 表示抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 夹在两直线 $y = 0, y = 1$ 之间的部分,

由不等式的解集为 $[-1, 2]$, 知 $0 \leq ax^2 + bx + c$ 恒成立, 否则解集形式上不可能是个闭区间,

故 $ax^2 + bx + c \leq 1$ 的解集是 $[-1, 2]$, $ax^2 + bx + c = 1$ 的两个根为 $-1, 2$. 由根与系数的关系知,

$-\frac{b}{a} = 1, \frac{c-1}{a} = -2$, 于是 $b = -a, c = -2a + 1$, 将其代入 $b^2 - 4ac = a^2 - 4a(1 - 2a) = 9a^2 - 4a \leq 0$,

得 $0 \leq a \leq \frac{4}{9}$. 因为 $a > 0$, 所以 $0 < a \leq \frac{4}{9}$, 所以 $4a + 5b + c = 4a - 5a + 1 - 2a = 1 - 3a \in \left[-\frac{1}{3}, 1 \right)$,

所以 $-\frac{1}{2}, 1$ 不满足题意, $-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ 满足题意.

阶段温习一

第 13 题 变式练透

答案 $[0, 4)$

不等式解集为空 $\Leftrightarrow ax^2 - ax + 1 > 0$ 恒成立. 若 $a = 0$, 则 $1 > 0$ 恒成立; 若 $a > 0$, 需 $\Delta = a^2 - 4a < 0$, 则 $0 < a < 4$; 若 $a < 0$, 图象开口向下, 不可能恒大于 0. 综上, $0 \leq a < 4$.

考点过关 6

第 14 题 类题拓展

答案 $\left[2, \frac{5+\sqrt{17}}{2} \right]$

分段函数严格递增需满足: ①左段函数 $f(x) = (x-2)^2$ 在 $(-\infty, a]$ 上单调递增 (故 $a \geq 2$, 因为 $(x-2)^2$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增); ②右段函数 $f(x) = x+2$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增 (斜率为 1); ③左段最大值 $f(a) = (a-2)^2 \leq$ 右段最小值 $f(a^+) = a+2$. 解不等式 $(a-2)^2 \leq a+2$, 得 $a^2 - 5a + 2 \leq 0$, 即 $a \in \left[\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2} \right]$. 结合 $a \geq 2$, 得 $2 \leq a \leq \frac{5+\sqrt{17}}{2}$.

考点过关 7

第 5 题 类题拓展

答案 1

由 $f(4-x) = -f(x)$ 及奇函数 $f(-x) = -f(x)$ ，得 $f(4-x) = f(-x)$ ，

故 $f(x+4) = f(x)$ ，周期为 4.

由 $f(-1) = -1$ ，得 $f(1) = 1$ ，且 $f(2) = 0$.

$2025 \equiv 1 \pmod{4}$ ，则 $f(2025) = f(1) = 1$;

$2026 \equiv 2 \pmod{4}$ ，则 $f(2026) = f(2) = 0$.

和为 1.

考点过关 8

第 8 题 类题拓展

答案 1

因为 $f(x_1) = f(x_2)$ ，所以 $|\ln(x_1 - 1)| = |\ln(x_2 - 1)|$ ，即 $\ln(x_1 - 1) = -\ln(x_2 - 1)$ ，则

$\ln(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 0$ ，所以 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1$ ，化简得 $x_1 x_2 = x_1 + x_2$. 故 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 1.$$

考点过关 9

第 11 题 类题拓展

答案 BD

1. 确定 a, b 的范围 :

方程 $\log_c x + x = 0$ ($c = 2, 3$) 可变形为 $c^x x = 1$ 。

易证函数 $g_c(x) = c^x x$ 在 $x > 0$ 时严格递增, 且 $g_c(0^+) = 0$, $g_c(1) = c > 1$,

故存在唯一 $x \in (0, 1)$ 使 $g_c(x) = 1$, 因此 $0 < a, b < 1$ 。

2. 比较 a 与 b 的大小 :

由 $2^a a = 1$, $3^b b = 1$ 。

因为 $3^x > 2^x$ ($x > 0$), 所以 $3^b b = 2^b b \cdot (3/2)^b > 2^b b$,

即 $2^b b < 1 = 2^a a$, 由 $g_2(x)$ 的单调性知 $b < a$ 。

同理, $3^a a > 2^a a = 1 = 3^b b$, 由 $g_3(x)$ 的单调性知 $a > b$ 。

因此 $0 < b < a < 1$, 选项 B 正确, A 错误。

3. 判断选项 C 和 D :

• 选项 C : $b \log_3 a < a \log_3 b$ 。

等价于 $\frac{\log_3 a}{a} < \frac{\log_3 b}{b}$ (两边同除以 $ab > 0$)。

令 $\varphi(x) = \frac{\log_3 x}{x} = \frac{\ln x}{x \ln 3}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2 \ln 3} > 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立,

故 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上严格递增。由 $b < a$ 得 $\varphi(b) < \varphi(a)$, 即 $\frac{\log_3 b}{b} < \frac{\log_3 a}{a}$,

这与 C 中不等式方向相反, 故 C 错误。

• 选项 D : $a \log_2 b < b \log_2 a$ 。

等价于 $\frac{\log_2 b}{b} < \frac{\log_2 a}{a}$ 。

令 $\psi(x) = \frac{\log_2 x}{x} = \frac{\ln x}{x \ln 2}$, 同样在 $(0, 1)$ 上严格递增。由 $b < a$ 得 $\psi(b) < \psi(a)$

即 $\frac{\log_2 b}{b} < \frac{\log_2 a}{a}$, 这正是 D 的不等式, 故 D 正确。

综上, 正确选项为 B 和 D。

考点过关 10

第 11 题 变式练透

答案 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

令 $t=f(x)$, 方程化为 $t^2 - 2at + a + \frac{1}{2} = 0$ 。令 $g(t) = t^2 - 2at + a + \frac{1}{2}$, 需有两个不

同实数根 $t_1, t_2 \in (-1, 0)$, 且每个 t_i 对应两个 x 。由二次函数性质得 $\Delta > 0$, 对称

轴 $a \in (-1, 0)$, 且 $g(-1) > 0$, $g(0) > 0$, 解得 $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ 。

考点过关 11

第 10 题 类题拓展

答案 ± 1

由奇函数性质, $f(-x) = -f(x)$, 代入解得 $1 - a^2 = 0$, 即 $a = \pm 1$.

验证均符合.

阶段温习二

第 4 题 变式练透

答案 9

由 $a + b = 1$, 代入得 $\frac{3}{a} + \frac{1}{ab} = \frac{4-3a}{a(1-a)}$.

令 $f(a) = \frac{4-3a}{a(1-a)}$, 求导得极值点 $a = \frac{2}{3}$, 此时最小值为 9.

考点过关 12

第 7 题 变式练透

答案 $\frac{1}{4}$

方程两边求导: $2f'(x) + 2f'(2x-1) = \frac{1}{x}$.

令 $x = 1$, 得 $2f'(1) + 2f'(1) = 1 \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{4}$.

考点过关 13

第 8 题 变式练透

答案 BC

设 $F(x) = e^x \cdot f(x)$, 则 $F'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x [f(x) + f'(x)]$. 因为对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有

$f(x) + f'(x) > 0$, 则 $F'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $F(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增; 因为 $\frac{1}{2} < 1$, 所以

$e^{\frac{1}{2}} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < e^1 \cdot f(1)$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) < \sqrt{e} f(1)$, 所以 A 错误; 因为 $-1 < 1$, 所以 $e^{-1} \cdot f(-1) < e^1 \cdot f(1)$,

则 $f(-1) < e^2 f(1)$, 所以 B 正确; 因为 $\ln 2 < 1$, 所以 $e^{\ln 2} \cdot f(\ln 2) < e^1 \cdot f(1)$, 则 $\frac{f(\ln 2)}{e} < \frac{f(1)}{2}$,

所以 C 正确; 因为 $0 < 1$, 所以 $e^0 \cdot f(0) < e^1 \cdot f(1)$, 则 $\frac{f(0)}{e} < f(1)$, 所以 D 错误.

考点过关 14

第 13 题 类题拓展

答案 $\left(\frac{e}{2}, +\infty\right)$

函数 $f(x) = (x-2)e^x - ax^2 + 2ax$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f'(x) = (x-1)e^x - 2ax + 2a = (x-1)(e^x - 2a)$, 当 $2a \leq 0$, 即 $a \leq 0$ 时, $e^x - 2a > 0$ 恒成立. 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, 1)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 即 $x=1$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点, 不符合题意; 当 $2a = e$, 即 $a = \frac{e}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 无极值, 不符合题意; 当 $0 < 2a < e$, 即 $0 < a < \frac{e}{2}$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < \ln 2a$ 或 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $\ln 2a < x < 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2a)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln 2a, 1)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 即 $x=1$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点, 不符合题意; 当 $2a > e$, 即 $a > \frac{e}{2}$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < 1$ 或 $x > \ln 2a$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $1 < x < \ln 2a$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, \ln 2a)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 即 $x=1$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点, 符合题意. 综上, 实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{e}{2}, +\infty\right)$.

考点过关 15

第 9 题 类题拓展

答案 -4

因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - bx + a^2 - 2$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 所以 $f'(x) = x^2 + ax - b$. 又因为 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处有极值 $\frac{5}{3}$, 所以 $\begin{cases} -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}a + b + a^2 - 2 = \frac{5}{3}, \\ 1 - a - b = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \frac{1}{2}a + b + a^2 = 4, \\ a + b = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -\frac{3}{2}, \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 2, \\ b = -1. \end{cases}$ 当 $\begin{cases} a = -\frac{3}{2}, \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$ 时, $f'(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = (x - \frac{5}{2})(x + 1)$, 当 $x < -1$ 或 $x > \frac{5}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-1 < x < \frac{5}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处有极大值, 则 $a-b=-4$; 当 $\begin{cases} a = 2, \\ b = -1 \end{cases}$ 时, $f'(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ 恒成立, 所以函数无极值, 不成立. 综上, $a-b=-4$.

考点过关 16

第 13 题 变式练透

答案 $\pi - 2$

因为锐角 α 终边上一点坐标为 $P(-\cos 2, \sin 2)$, 由三角函数定义可得 $\tan \alpha = \frac{\sin 2}{-\cos 2} =$

$-\tan 2 = \tan(\pi - 2)$. 又因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\alpha = \pi - 2$.

考点过关 17

第 6 题 类题拓展

答案 $\frac{1}{3}$

由和差公式: $\frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = 2$,

交叉相乘化简得 $3 \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta$,

故 $\tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{3}$.

考点过关 18

第 4 题 变式练透

答案 $(0, 2]$

令 $t = \omega x + \frac{\pi}{6}$, 当 $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ 时, $t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{6}]$.

需 t 的区间包含于 $\sin t$ 的某个递增区间 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$.

取 $k = 0$, 得 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6}$ 且 $\frac{(\omega+1)\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \omega \leq 2$.

考点过关 19

第 4 题 类题拓展

答案 2

$c \cos B + (2a + b) \cos C = 0$, 由正弦定理得, $\sin C \cos B + (2 \sin A + \sin B) \cos C = 0$, 即

$\sin C \cos B + \sin B \cos C + 2 \sin A \cos C = 0$, 所以 $\sin(B + C) + 2 \sin A \cos C = 0$, 即

$\sin A(1 + 2 \cos C) = 0$. 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$, 故 $\cos C = -\frac{1}{2}$. 因为 $C \in (0, \pi)$, 所以

$C = \frac{2\pi}{3}$. 因为 $\triangle ABC$ 的外接圆的面积为 π , 所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 1. 由正弦定理得

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 2, \text{ 解得 } c = \sqrt{3}. \text{ 由余弦定理得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{2\pi}{3} = (a+b)^2 - ab = 3, \text{ 则}$$

$$ab = (a+b)^2 - 3. \text{ 由基本不等式得 } ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}, \text{ 当且仅当 } a=b \text{ 时等号成立, 所以}$$

$$(a+b)^2 - 3 \leq \frac{(a+b)^2}{4}, \text{ 解得 } a+b \leq 2.$$

考点过关 20

第 3 题 类题拓展

答案 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2\left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \text{ 所以 } x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(x)_{\max} = 2,$$

$$\text{此时 } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } \theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \text{ 所以 } \cos \theta = \cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

考点过关 21

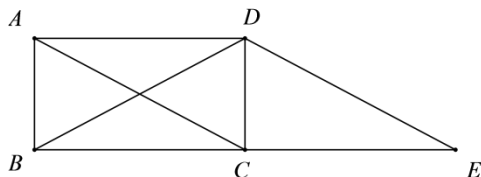
第 13 题 类题拓展

答案 4

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{BD} = \vec{AC} + \vec{BD}$, 延长 BC 至 E , 使 $CE = BC$, 连接 DE . 由于

$\vec{CE} = \vec{BC} = \vec{AD}$, 所以 $CE \parallel AD, CE = AD$, 所以四边形 $ACED$ 是平行四边形, 则 $\vec{AC} = \vec{DE}$, 所以

$$\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{DE} + \vec{BD} = \vec{BE}, \text{ 所以 } |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{BE}| = 2|\vec{BC}| = 2|\vec{AD}| = 4.$$



考点过关 23

第 4 题 变式练透

答案 -1

由 $a+2b+3c=0$, 得 $a+2b=-3c$, 两边平方得 $|a|^2+4|b|^2+4|a| \cdot |b| \cdot \cos \langle a, b \rangle = 9|c|^2$, 即 $\cos \langle a, b \rangle = 1$, 所以 a, b 方向相同, 同理, 可得 a, c 方向相反, b, c 方向相反, 所以 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = 1 + (-1) + (-1) = -1$.

考点过关 24

第 13 题 变式练透

答案 3

复数 z 满足 $|z-i|+|z+i|=6$, 由椭圆定义: 复平面上到两定点 $(0,1)$ 和 $(0,-1)$ 的距离和为 6 的点的轨迹是椭圆, 其中长轴长 $2a=6$ ($a=3$), 焦距 $2c=2$ ($c=1$), 短轴 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. 椭圆上点到原点的最大距离为长轴端点到原点的距离, 即为 3 (顶点为 $(0,\pm 3)$), 故 $|z|$ 的最大值为 3.

阶段温习四

第 5 题 类题拓展

答案 B

令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ($x>0$), 则 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 令 $f'(x)=0$, 解得 $x=e$, 所以当

$0<x<e$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x>e$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减. 因为

$a=\frac{\ln 2}{2}=\frac{2\ln 2}{2\times 2}=\frac{\ln 4}{4}=f(4)$, $b=\frac{1}{e}=\frac{\ln e}{e}=f(e)$, $c=\frac{2\ln 3}{9}=\frac{\ln 9}{9}=f(9)$, 而 $e<4<9$, 所

以 $f(e)>f(4)>f(9)$, 即 $b>a>c$.

考点过关 25

第 14 题 类题拓展

答案 2

由递推式 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ ($n\geq 2$), 变形得 $a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$, 两边乘 a_n 得 $a_n^2=a_{n+1}a_n-a_{n-1}a_n$, 则

$S_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1+a_3a_2-a_1a_2+a_4a_3-a_2a_3+\cdots+a_{n+1}a_n-a_{n-1}a_n=1-a_1a_2+a_{n+1}a_n=a_{n+1}a_n-2$,

因此 $S_{2025}=a_{2025}a_{2026}-2$, 即 $m=2$.

考点过关 26

第 13 题 变式练透

答案 $\frac{2(n+1)}{3n+5}$

设 $a_n=2tn$, $b_n=t(3n+1)$, 则 $S_n=tn(n+1)$, $T_n=\frac{tn(3n+5)}{2}$,
得 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2(n+1)}{3n+5}$.

考点过关 27

第 12 题 类题拓展

答案 $\sqrt{51}$

由题意 $a_6a_{10} + a_3a_5 = a_8^2 + a_4^2 = 41$, 所以 $(a_4 + a_8)^2 = a_4^2 + a_8^2 + 2a_4a_8 = 51$. 又 $a_n > 0$, 所以

$$a_4 + a_8 = \sqrt{51}.$$

考点过关 28

第 7 题 变式练透

答案 820

递推式化为 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$, 累加得 $\frac{a_n}{n} = 4 - \frac{1}{n}$, 所以 $a_n = 4n - 1$, $S_{20} = \sum_{n=1}^{20} (4n - 1) = 820$.

考点过关 29

第 4 题 类题拓展

答案 $\left[\frac{20}{11}, 2\right]$

由题意得 $\lambda \neq 0$,

$S_n = \frac{\lambda}{2}n^2 + \frac{\lambda-40}{2}n$, 为关于 n 的二次函数。

由 $S_n \geq S_{10}$ 知对称轴满足 $9.5 \leq \frac{40-\lambda}{2\lambda} \leq 10.5$,

解得 $\lambda \in \left[\frac{20}{11}, 2\right]$ 。

考点过关 30

第 8 题 变式练透

答案 $\frac{4}{3}$

设球的半径为 $R=1$, 圆锥的高为 h , 底面半径为 r . 由球的截面性质得 $R^2 = (h-R)^2 + r^2$, 即 $1 = (h-1)^2 + r^2$,

整理得 $r^2 = 2h - h^2$. 圆锥体积 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(2h^2 - h^3)$. 对 V 求导, 得 $V' = \frac{\pi}{3}(4h - 3h^2)$, 令 $V' = 0$, 解得 $h = \frac{4}{3}$

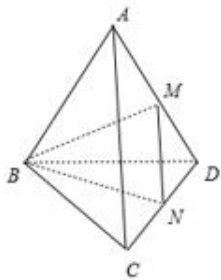
($h=0$ 舍去).

考点过关 31

第 6 题 类题拓展

答案 C

设各棱长均相等的四面体 $A-BCD$ 的棱长为 2, 取 CD 中点 N , 连接 MN, BN . 由 M 是棱 AD 的中点, 得 $MN \parallel AC$, 故 $\angle BMN$ 是异面直线 BM 与 AC 所成的角 (或补角). 又 $BM = BN = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}, MN = 1$, 所以 $\cos \angle BMN = \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2 \cdot BM \cdot MN} = \frac{3+1-3}{2 \times \sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 所以异面直线 BM 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

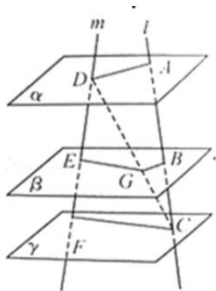


考点过关 32

第 13 题 变式练透

答案 $\frac{9}{4}$

连接 CD , 交平面 β 于点 G , 连接 EG, BG, AD, CF , 如图所示. 因为 $l \cap CD = C$, 所以 l 与 CD 确定一个平面, 设为 α_1 . 因为 $\alpha \cap \alpha_1 = AD, \beta \cap \alpha_1 = BG$, 且 $\alpha \parallel \beta$, 所以 $AD \parallel BG$, 所以 $\frac{AB}{BC} = \frac{DG}{GC}$. 同理可得 $GE \parallel CF$, 则 $\frac{DG}{GC} = \frac{DE}{EF}$, 所以 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. 所以 $DE = \frac{AE \cdot EF}{BC} = \frac{3 \times 3}{4} = \frac{9}{4}$.



考点过关 33

第 3 题 类题拓展

答案 B

由题意可得, $\angle PQA = \angle PQB = \angle PQC = 90^\circ$. 因为 $PA = PB = PC$, PQ 为公共边, 所以

$\triangle PQA \cong \triangle PQB \cong \triangle PQC$ ，所以 $QA = QB = QC$ ，所以 Q 为 $\triangle ABC$ 的外心.

考点过关 34

第 5 题 类题拓展

答案 **A**

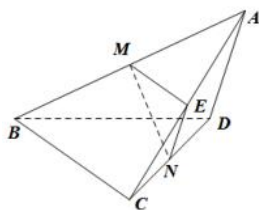
取 AC 的中点 E ，连接 ME ， EN . 又 M ， N 分别为 AB 和 CD 的中点，所以 $ME \parallel BC$ ，且

$ME = \frac{1}{2}BC = 2$ ， $EN \parallel AD$ ，且 $EN = \frac{1}{2}AD = 1$. 因为向量 \overrightarrow{AD} 与向量 \overrightarrow{BC} 的夹角为 120° ，所以

向量 \overrightarrow{EN} 与向量 \overrightarrow{ME} 的夹角为 120° . 又 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EN}$ ，所以

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EN})^2 = \overrightarrow{ME}^2 + 2\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EN}^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1^2 = 3, \text{ 所以 } |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3},$$

即线段 MN 的长为 $\sqrt{3}$.



阶段温习六

第 14 题 类题拓展

答案 $\frac{2\pi}{3}$

解法 1 $\sin \alpha + \sin \beta = -\sin \gamma$ ， $\cos \alpha + \cos \beta = -\cos \gamma$ ，两式平方相加即得 $\cos(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}$. 又

$0 < \beta - \alpha < \pi$ ，所以 $\beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}$.

解法 2 设 $\mathbf{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $\mathbf{b} = (\cos \beta, \sin \beta)$ ， $\mathbf{c} = (\cos \gamma, \sin \gamma)$. 因为

$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$ ， $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$ ，所以 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. 所以向量 \mathbf{a} ， \mathbf{b} ， \mathbf{c} 可构成首

尾相连的等边三角形，从而 $\beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}$.

考点过关 36

第 5 题 变式练透

答案 $(-\infty, 0] \cup [\frac{5}{3}, +\infty)$

直线 l 过定点 $P(-2, 1)$ ，计算 PA ， PB 的斜率分别为 $k_{PA} = \frac{2}{3}$ ， $k_{PB} = -1$. 由数形结合可知直线 l 的

斜率 $m-1$ 需满足 $m-1 \leq -1$ 或 $m-1 \geq \frac{2}{3}$, 解得 $m \leq 0$ 或 $m \geq \frac{5}{3}$.

考点过关 37

第 6 题 类题拓展

答案 $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

联立直线 l_1 与 l_2 的方程, 消去 m 得交点 P 的轨迹方程为 $x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = (\frac{\sqrt{13}}{2})^2$, 即 P 在以 $(0, -\frac{3}{2})$

为圆心, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 为半径的圆上. $|OP|$ 的最大值为圆心到原点的距离加半径, 即 $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

考点过关 38

第 5 题 变式练透

答案 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

椭圆上存在点 P 使 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形的点有 4 个 \Leftrightarrow 仅直角在焦点处, 即上、下顶点 (焦点在 x 轴上) 或左、右顶点 (焦点在 y 轴上) 与两焦点形成的三角形为锐角三角形, 即 $\frac{c}{b} < 1$, 故 $c^2 < a^2 - c^2$, 即 $0 < e < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

考点过关 39

第 12 题 类题拓展

答案 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

设 $A(x_0, y_0)$, $B(-x_0, -y_0)$, $P(x, y)$, 由斜率积条件得 $\frac{y^2 - y_0^2}{x^2 - x_0^2} = \frac{5}{4}$, 结合双曲线方程得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{4}$, 又 $c = 3$, 解得 $a^2 = 4$, $b^2 = 5$.

考点过关 40

第 13 题 变式练透

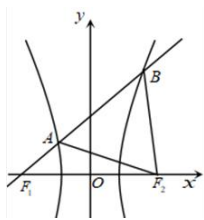
答案 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

设 $A(x_0, y_0)$, 由 AF 中点到 y 轴距离为 2 得 $\frac{x_0+1}{2} = 2 \Rightarrow x_0 = 3$, $y_0 = 2\sqrt{3}$.
切线斜率 $k = \frac{2}{y_0} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

考点过关 41

第 13 题 类题拓展

答案 $\sqrt{7}$



由 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形, 知 $|AB| = |AF_2| = |BF_2|$, 且 $\angle BAF_2 = 60^\circ$, 即 $\angle F_1AF_2 = 120^\circ$. 由双曲线的定义可得, B 在双曲线上, 即 $|AF_1| = |BF_1| - |BF_2| = 2a$, A 在双曲线上, 即 $|AF_2| - |AF_1| = 2a$, 故 $|AF_2| = |AF_1| + 2a = 2a + 2a = 4a$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 又 $\angle F_1AF_2 = 120^\circ$, 由余弦定理可得,

$$2c = |F_1F_2| = \sqrt{|AF_1|^2 + |AF_2|^2 - 2|AF_1| \cdot |AF_2| \cos 120^\circ} = \sqrt{4a^2 + 16a^2 - 2 \times 2a \times 4a \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{7}a, \text{ 即}$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{7}, \text{ 即 } e = \sqrt{7}. \text{ 所以该双曲线的离心率为 } \sqrt{7}.$$

阶段温习七

第 5 题 类题拓展

答案 46

由等差数列的性质可知 $S_{13}, S_{26} - S_{13}, S_{39} - S_{26}, S_{52} - S_{39}$ 成等差数列, 即 1, 8, $S_{39} - 9, S_{52} - S_{39}$

成等差数列, 且公差为 $8 - 1 = 7$, 所以 $S_{39} - 9 = 8 + 7 = 15, S_{52} - S_{39} = 15 + 7 = 22$, 得

$$S_{39} = 24, S_{52} = S_{39} + 22 = 46.$$

考点过关 42

第 5 题 类题拓展

答案 D

设男生 a 人, 女生 b 人, 则 $p = \frac{am+bn}{a+b}$. 又 $p - \frac{m+n}{2} = \frac{(a-b)(m-n)}{2(a+b)}$, 其符号不确定, 所以三种情况都有可能.

考点过关 43

第 7 题 变式练透

答案 130

总选法数为 $C_{10}^4 = 210$, 无一对双胞胎的选法: 先选 4 对双胞胎, 每对双胞胎选 1 人,

即 $C_5^4 \times 2^4 = 5 \times 16 = 80$. 故至少有一对双胞胎的选法数为 $210 - 80 = 130$.

考点过关 44

第 13 题 变式练透

答案 10

对等式两边求导, 得 $10(2x - 1)^4 = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4$,

令 $x=1$, 得 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 10$.

考点过关 45

第 6 题 变式练透

答案 $\frac{1}{21}$

所有的事件数为 A_9^9 , 设 $x_{i,j}$ 表示第 i 行、第 j 列的数. 平方数为 1, 4, 9, 共 3 个, 当 $x_{1,1}$ 为

平方数时, 第 2 行的平方数只能在第 3 列, 第 3 行的平方数只能在第 2 列, 即 $(x_{1,1}, x_{2,3},$

$x_{3,2})$, 同理, 可得其他不同情况有 $(x_{1,2}, x_{2,1}, x_{3,3})$, $(x_{1,2}, x_{2,3}, x_{3,1})$,

$(x_{1,3}, x_{2,1}, x_{3,2})$, 共 4 种, 将 3 个平方数全排列, 剩余 6 个数全排列, 所以所求概率

为 $\frac{4A_3^3 A_6^6}{A_9^9} = \frac{1}{21}$.

考点过关 46

第 3 题 类题拓展

答案 $\frac{20}{27}$

设每局比赛甲获胜的概率为 p ，乙获胜的概率为 $q = 1 - p$ 。比赛结束有两种情况：在 2 局后结束，或在 4 局后结束。

1. 比赛在 2 局后结束

此时甲连胜两局，概率为 p^2 。

2. 比赛在 4 局后结束且甲获胜

(i) 甲以 3:1 获胜

前 3 局甲胜 2 局、乙胜 1 局，且前两局不能出现一方连胜（否则 2 局结束），第 4 局甲胜。满足条件的序列有：

• ABAA（甲胜、乙胜、甲胜、甲胜），概率为 $p \cdot q \cdot p \cdot p = p^3 q$ 。

• BAAA（乙胜、甲胜、甲胜、甲胜），概率为 $q \cdot p \cdot p \cdot p = p^3 q$ 。

总概率为 $2p^3 q$ 。

(ii) 比赛以 2:2 结束，且第一局甲胜（按规则判甲获胜）

前两局必须为甲胜、乙胜（否则若甲连胜则 2 局结束），后两局有两种可能：

• ABAB（甲胜、乙胜、甲胜、乙胜），概率为 $p \cdot q \cdot p \cdot q = p^2 q^2$ 。

• ABBA（甲胜、乙胜、乙胜、甲胜），概率为 $p \cdot q \cdot q \cdot p = p^2 q^2$ 。

总概率为 $2p^2 q^2$ 。

甲获胜的总概率

$$P = p^2 + 2p^3 q + 2p^2 q^2 = p^2(1 + 2pq + 2q^2).$$

因为甲每局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$ ，乙每局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，则 $P = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left[1 + 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$

$$= \frac{4}{9} \times \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{15}{9} = \frac{20}{27}.$$

考点过关 48

第 2 题 变式练透

答案 0

设向右移动 k 次，向左移动 $4 - k$ 次，则位置 $X = k - (4 - k) = 2k - 4$. $k \sim B(4, \frac{1}{2})$ ，期望 $E(k) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$. 所以 $E(X) = E(2k - 4) = 2E(k) - 4 = 2 \times 2 - 4 = 0$.

考点过关 49

第 6 题 类题拓展

答案 A

由 $\sum_{i=1}^9 x_i = 33$ ，得 $\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = \frac{11}{3}$ ，则 $\bar{y} = 2\bar{x} - 1 = \frac{19}{3}$ ，所以新增数据 $(-3, 3)$ 后， $\bar{x}_1 = \frac{33 - 3}{10} = 3$ ，

$\bar{y}_1 = \frac{9 \times \frac{19}{3} + 3}{10} = 6$. 所以新的回归直线过点 $(3, 6)$ ，且修正后的回归直线的斜率为 2.1，则

$6 = 2.1 \times 3 + \hat{a} \Rightarrow \hat{a} = -0.3$ ，则修正后的回归直线方程为 $y = 2.1x - 0.3$ ，当 $x = 4$ 时，

$y = 2.1 \times 4 - 0.3 = 8.1$ ，则数据 $(4, 8.2)$ 的残差为 0.1.